Оглавление.

1. Введение.

2. Основная часть.

2.1. Расстояние между двумя точками.

2.2. Введение понятия расстояния между фигурами в пространстве. Расстояние от точки до прямой.

2.3. Расстояние от точки до плоскости.

2.4. Расстояние между двумя прямыми.

2.5. Расстояние от прямой до плоскости.

2.6. Расстояние между плоскостями.

3. Заключение

4. Список литературы.

1. Введение.

На протяжении многих веков человечество не переставало пополнять свои научные знания в той или иной области науки. Стереометрия, как наука о фигурах в пространстве, неотъемлемо связана со многими из научных дисциплин. К таким дисциплинам относятся: математика, физика, информатика и программирование, а также химия и биология. В архитектуре постоянно используются теоремы и следствия из стереометрии.

Нахождение расстояний в пространстве является достаточно сложным вопросом в стереометрии. В школьной программе ему уделяется мало времени, а на вступительных экзаменах в ВУЗы и на выпускных экзаменах по математике за курс средней школы задачи на нахождение расстояний встречаются в наиболее сложной части экзамена, а поэтому наиболее весомой. И я решил подробно разобрать эту тему для успешной сдачи экзамена в ВУЗ.

При подготовке реферата я составил план, рассмотрел все случаи нахождения расстояний между точками, прямыми и плоскостями, привёл необходимые определения и доказал некоторые теоремы. К каждой части плана подобрал и решил задачи, самостоятельно решил сложные задачи из вариантов вступительных экзаменов в престижные ВУЗы Москвы, создал презентацию в PowerPoint**.**

Мною, помимо школьных учебников, была изучена литература, список которой приведен в конце реферата.

2. Основная часть.

2.1. Расстояние между двумя точками.

Расстояние – геометрическое понятие, содержание которого зависит от того, для каких объектов оно определяется.

Расстояние между двумя точками – длина соединяющего их отрезка прямой.

Задача 1. Найдите расстояние между точками P и H – серединами скрещивающихся рёбер:

а) куба с ребром, равным *a*;

б) тетраэдра, все рёбра которого равны *a*;

в) правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания, равной *a*, и правильным треугольником в диагональном сечении.

Решение.

а) (рис. 1)

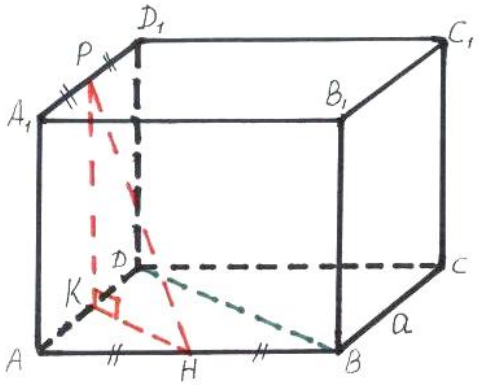


рис.1

$PK \perp AD,\ AK = KD$

ΔPKH

$\angle K = 90^\circ$

$PK = a$

$$KH = \frac{1}{2}DB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$PH = \rho|P,H| = \sqrt{a^2 + \frac{2a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

Ответ: $\frac{a\sqrt{6}}{2}$

б) (рис. 2)

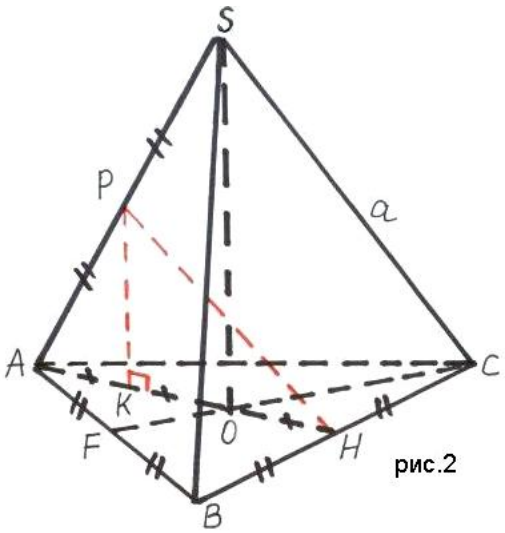


рис.2

$AH \cap CF = O,\ SO \perp (ABC),\ PK \perp (ABC),\ K \in AH,$

$AK = KO = OH.$

1) $\Delta AOS,\quad \angle O = 90^o$

$$AS = a,\quad AO = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$SO = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

2) $\Delta PKH,\quad \angle K = 90^o$

$$PK = \frac{1}{2}SO = \frac{a}{\sqrt{6}}$$

$$KH = AO = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$PH = \sqrt{\frac{a^2}{6} + \frac{a^2}{3}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

в) (рис. 3)

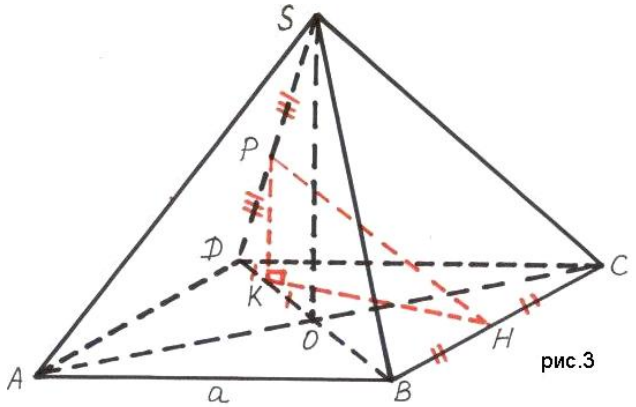
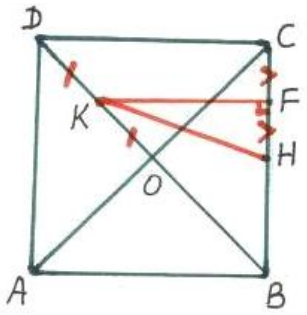


рис.3



AC ∩ DB = O, SO⊥(ABC), ΔSDB – правильный,

$$SO = \frac{DB\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

$$KP \perp (ABC), \quad K \in DB, \quad DK = KO,$$

$$PK = \frac{1}{2}SO = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$

2) $ABCD, \ KF \perp CB, \quad CF = FH$

$$\Delta KFH, \quad \angle F = 90^o, \quad KF = \frac{3}{4}a$$

$$FH = \frac{1}{4}a,$$

$$KH = \sqrt{\frac{9}{16}a^2 + \frac{1}{16}a^2} = \frac{a\sqrt{10}}{4}$$

3) $\Delta PKH, \quad \angle K = 90^o, \quad PK = \frac{a\sqrt{6}}{4},$

$$KH = \frac{a\sqrt{10}}{4}, \quad PH = \sqrt{\frac{6a^2}{16} + \frac{10a^2}{16}} = a$$

Ответ: *a*

<u>Задача 2.</u> На рёбрах A_1B_1 и B_1C_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ соответственно точками M и L отмечены середины, на ребре AB взята точка K такая, что AK : AB = 3 : 4. Считая AB = AA_1 = 1, AD = 2, найдите расстояние от точки P – точки пересечения диагонали B_1D с плоскостью KLM до точки:

a) D; b) D_1; c) B.

Решение.

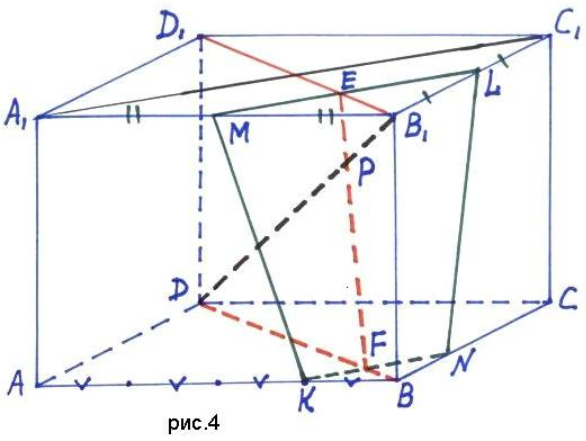


рис.4

1) (Рис.4) Построение сечения:

1. ML
2. MK
3. KN||ML, N = KN∩BC
4. NL
5. LMKN – сечение

2) Нахождение точки P, где

P= B_1D∩(KLM)

$B_1D \subset (DBB_1)$

(DBB_1)∩(KLM) = EF, E = B_1D_1∩ML, F = KN∩DB,

B_1D∩(KLM) = B_1D∩EF = P

3) Нахождение расстояний

$D_1E : EB_1 = 3 : 1$, DF : FB = 7 : 1,

$DB = \sqrt{5}$

а) DP-?

ΔEPB_1 *подобен* ΔDPF (по 2[м] углам), $\Rightarrow$,

$DP : PB_1 = DF : EB_1 = 7 : 2, \Rightarrow$,

$DP = \frac{7}{9} DB_1; \quad DB_1 = \sqrt{5+1} = \sqrt{6}, \Rightarrow,$

$DP = \frac{7}{9}\sqrt{6}$

б) D_1P - ? в) BP - ?

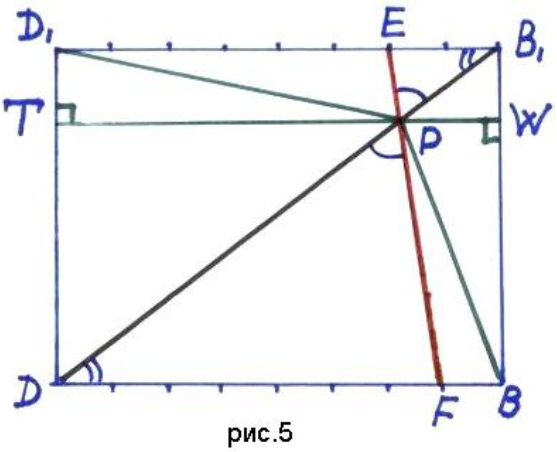


рис.5

Проведем через точку P прямую

TW || DB, T∈DD_1, W∈BB_1.

$\frac{TP}{PW} = \frac{DP}{PB_1} = \frac{7}{2}, \quad TP = \frac{7}{9} DB = \frac{7}{9}\sqrt{5},$

$PW = \frac{2}{9}\sqrt{5}.$

$\frac{TD_1}{WB} = \frac{2}{7}, \quad TD_1 = \frac{2}{9}\cdot 1 = \frac{2}{9},$

$WB = \frac{7}{9}\cdot 1 = \frac{7}{9}.$

$\Delta TD_1P: \quad D_1P = \sqrt{\frac{4}{81} + \frac{49\cdot 5}{81}} = \frac{\sqrt{249}}{9}$

$\Delta PWB: \quad PB = \sqrt{\frac{20}{81} + \frac{49}{81}} = \frac{\sqrt{69}}{9}$

Ответ: $DP = \frac{7}{9}\sqrt{6}$; $D_1P = \frac{\sqrt{249}}{9}$; $PB = \frac{\sqrt{69}}{9}$.

В том случае, когда особенности рассматриваемой геометрической фигуры позволяют ввести прямоугольную систему координат, расстояние между точками $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ можно вычислить по формуле

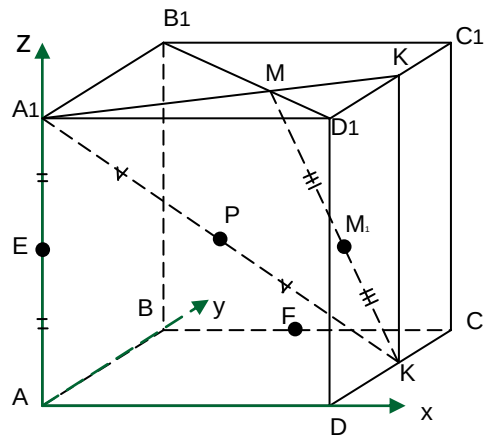
$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

<u>Задача 3.</u> (МФТИ) Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 1, точки E, F и K – середины рёбер AA_1, BC и CD соответственно, а точка M расположена на диагонали B_1D_1 так, что $B_1M = 2MD_1$. Найти расстояние между точками:

а) E и K; б) E и M; в) M_1 и K_1, где M_1 – середина отрезка KM, K_1 – середина ребра C_1D_1; г) F и P, где P – середина отрезка A_1K.

Решение.

Введём систему координат способом, указанным на рисунке. Тогда $E(0;0;\frac{1}{2})$, $K(1;\frac{1}{2};0)$. $F(\frac{1}{2};1;0)$, $M(\frac{2}{3};\frac{1}{3};1)$, $C_1(1;1;1)$, $D_1(1;0;1)$, $A_1(0;0;1)$



$$M_1\left(\frac{1+\frac{2}{3}}{2};\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{2};\frac{0+1}{2}\right) = \left(\frac{5}{6};\frac{5}{12};\frac{1}{2}\right), \qquad K_1(1;\frac{1}{2};1),$$

$P(\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{2})$,

$$EK = \sqrt{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}, \qquad EM = \sqrt{\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{29}}{6}, \qquad M_1K_1 = \sqrt{\frac{1}{36}+\frac{1}{144}+\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{41}}{12}$$

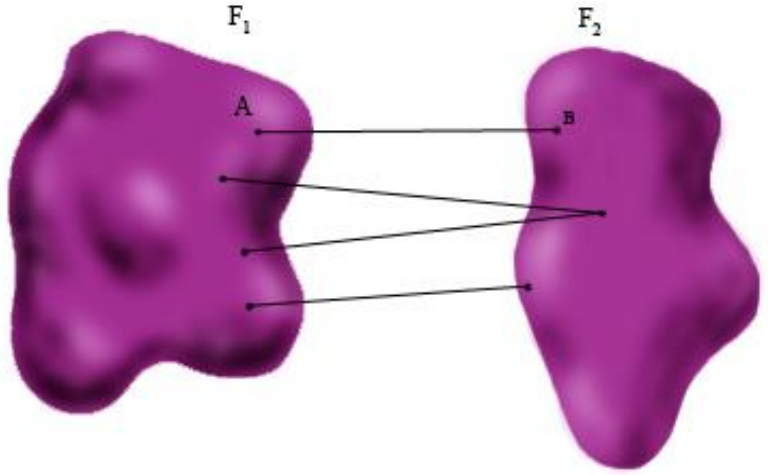
$$FP = \sqrt{0+\frac{9}{16}+\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{4}.$$

Ответ: $EK = \frac{\sqrt{6}}{2}$, $EM = \frac{\sqrt{29}}{6}$, $M_1K_1 = \frac{\sqrt{41}}{12}$, $FP = \frac{\sqrt{13}}{4}$.

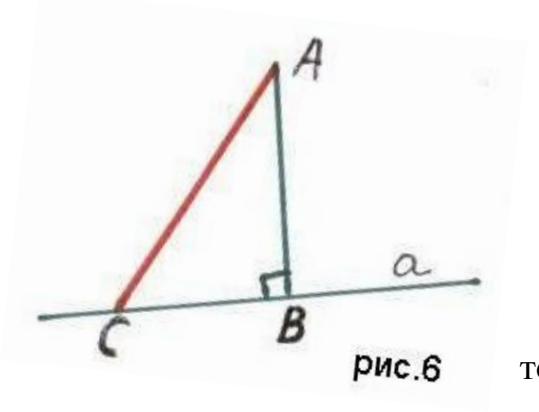
2.2. Введение понятия расстояния между фигурами в пространстве. Расстояние от точки до прямой.

Пусть в пространстве даны две фигуры F_1 и F_2. Фигуры состоят из множества точек, между которыми можно находить расстояние. Пусть $A \in F_1$, $B \in F_2$. Будем рассматривать различные расстояния AB.

Если среди всех расстояний между точками, одна из которых принадлежит фигуре F_1, а другая - фигуре F_2, существует наименьшее, то его называют расстоянием между фигурами F_1 и F_2.



Расстояние от точки до прямой – длина отрезка перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную прямую.



Пусть дана точка A и прямая $AB \perp a$, $B = AB \cap a$. (рис.6)

$AB = \rho|A, a|$, так как, если взять произвольную точку $C \in a$, то ΔABC – прямоугольный, $AB < AC, \Rightarrow$, $AB = \rho|A, a|$

Замечание: Если $A \in a$, то $\rho|A, a| = 0$

Задача 4 (рис.7) В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник с прямым углом при вершине C, боковое ребро призмы равно меньшей стороне основания. В грани AA_1C_1C точкой O отмечен центроид этой грани. Считая $AC=a$, найдите расстояние до прямой BO от точки:

a) A_1; b) B_1; c) C_1.

Решение.

1) $AC=BC=AA_1=a$, $\angle ACB=90°$,

AA_1C_1C, C_1CBB_1 – квадраты

2) (рис.8) ΔAC_1B, $AB = AC_1 = C_1B = a\sqrt{2}$

тогда BO – медиана и высота,

$C_1O \perp BO$, $C_1O = \rho|C_1, BO| = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

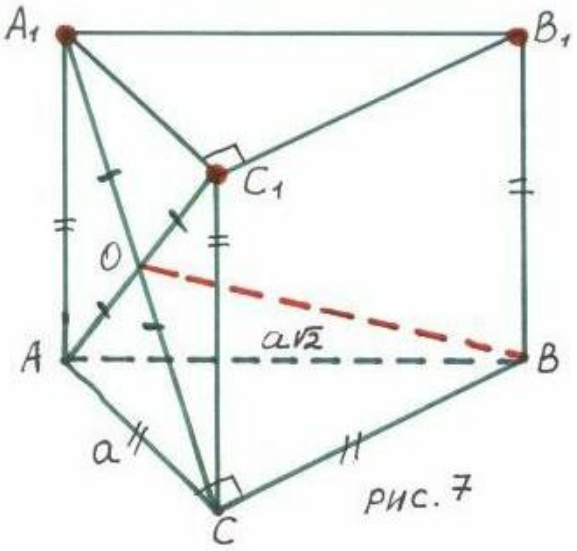


рис. 7

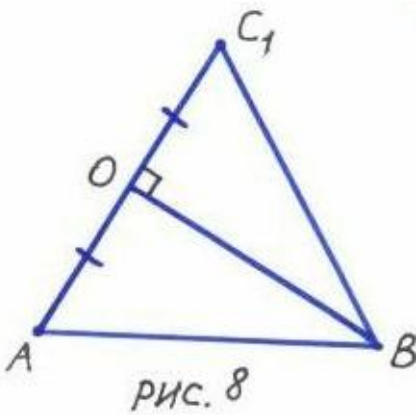


рис. 8

3)(рис.9) $\left.\begin{array}{l} AC \perp BC \\ AC - пр_{(ABC)} A_1C \end{array}\right\} \Rightarrow A_1C \perp BC$, *т.е.*

ΔA_1CB – *прямоугольный.*

$A_1N \perp BO$,

$A_1N = \rho|A_1, BO|$

$S_{\Delta A_1CB} = \dfrac{1}{2} a \cdot a\sqrt{2} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$

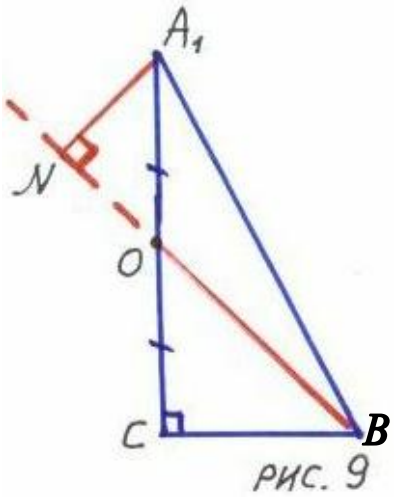


рис. 9

$$S_{\Delta A_1OB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{4}, \quad CO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$BO = \sqrt{a^2 + \frac{2a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

$$S_{\Delta A_1OB} = \frac{1}{2} \cdot BO \cdot A_1N \Rightarrow$$

$$A_1N = \frac{2 \cdot \frac{a^2\sqrt{2}}{4}}{\frac{a\sqrt{6}}{2}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

4) (рис.10) Проведем прямую $MM_1 \| AA_1$ через точку O и рассмотрим прямоугольник MM_1B_1B.

$$S_{MM_1B_1B} = 2S_{\Delta OB_1B} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot OB \cdot B_1K, \text{ где } B_1K \perp OB,\ B_1K = \rho|B_1, OB|$$

$$B_1K = \frac{S_{MM_1B_1B}}{OB}, \quad OB = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

$$S_{MM_1B_1B} = BB_1 \cdot MB = a \cdot MB$$

$$MB = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$S_{MM_1B_1B} = \frac{a^2\sqrt{5}}{2}$$

$$B_1K = \frac{\frac{a^2\sqrt{5}}{2}}{\frac{a\sqrt{6}}{2}} = \frac{a\sqrt{30}}{6}$$

Ответы: $\rho|A_1, BO| = \frac{a}{\sqrt{3}}$

$\rho|B_1, BO| = \frac{a\sqrt{30}}{6}$

$\rho|C_1, BO| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

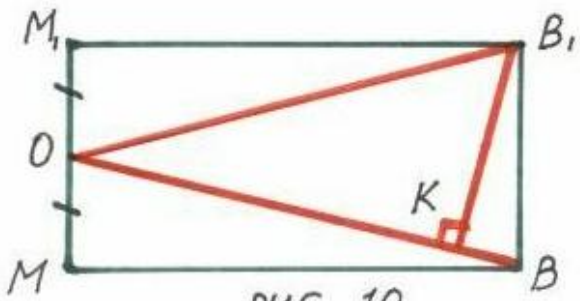


РИС. 10

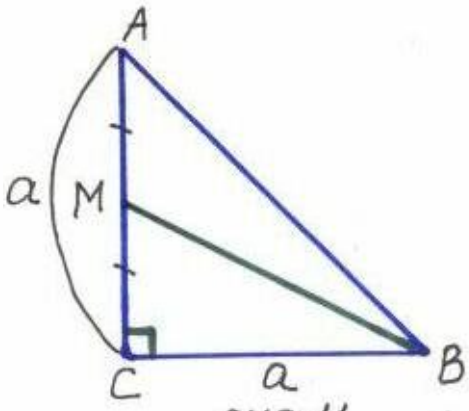


РИС. 11

2.3. Расстояние от точки до плоскости.

Расстояние от точки до плоскости – длина отрезка перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную плоскость.

Действительно, пусть дана точка A и плоскость β. Опустим из точки A на плоскость перпендикуляр AB, $AB \cap \beta = B$ (рис. 12). Возьмем произвольную точку $C \neq B$ в плоскости β. ΔABC – прямоугольный, AC – гипотенуза, AB – катет, $AB < AC$. То есть, AB наименьшее из всех расстояний между A и точками плоскости β, следовательно, $\rho|A, \beta| = AB$.

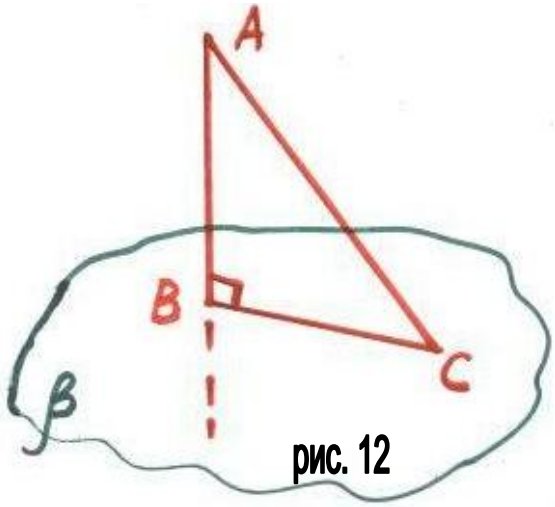


рис. 12

Замечание: Если $A \in \beta$, то $\rho|A, \beta| = 0$

Так как объёмные чертежи при решении стереометрических задач мы изображаем на плоскости, то иногда трудно построить перпендикуляр от точки до плоскости. Как быть? Поступают следующим образом:

- находят (или строят) плоскость, которая пересекает данную плоскость и содержит данную точку;
- строят линейный угол угла между этими плоскостями так, чтобы данная точка лежала в плоскости этого угла;
- опускают перпендикуляр из данной точки на ребро линейного угла, лежащее в данной плоскости. Это и есть перпендикуляр от заданной точки до заданной плоскости.

Докажем это (рис. 13).

Пусть надо найти расстояние от точки A до плоскости β и пусть точка A лежит в плоскости α, α∩β= c. Проведём $AB \perp c$, $BP \perp c$, $\angle(\alpha,\beta) = \angle PBC$, $AN \perp PB$.

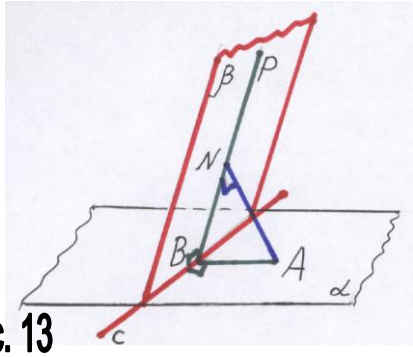


рис. 13

$$\left.\begin{array}{l} c \perp AB \\ c \perp PB \\ AB \cap PB = B \end{array}\right\} \Rightarrow c \perp (PBA), \quad AN \subset (PBA), \Rightarrow, c \perp AN$$

$$\left.\begin{array}{l} AN \perp c \\ AN \perp PB \\ c \cap PB = B \end{array}\right\} \Rightarrow AN \perp \beta, \Rightarrow, \rho|A, \beta| = AN$$

<u>Задача №</u> 5 (рис.14) На рёбрах AB и AD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ соответственно точками P и Q отмечены середины. Считая ребро куба равным a, найдите расстояние до плоскости C_1PQ от точки:

а) C; б) A_1; в) D.

Решение.

а) $C \in (ABC)$, $\left.\begin{array}{l} AC \perp DB \\ QP // DB \end{array}\right\} \Rightarrow AC \perp QP, \quad QP \cap AC = E$

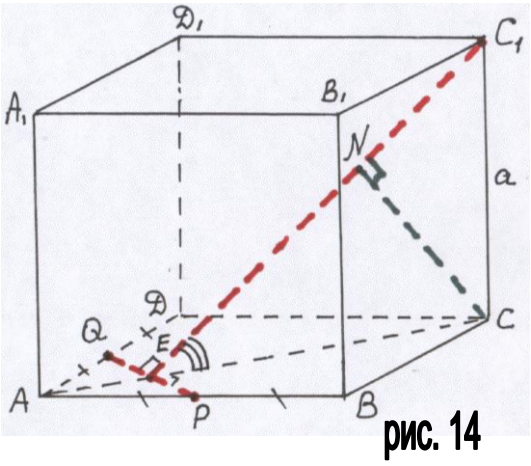


рис. 14

$$\left.\begin{array}{l} EC - np_{(ABC)} EC_1 \\ EC \perp QP \end{array}\right\} \Rightarrow EC_1 \perp QP$$

$$\left.\begin{array}{l} EC_1 \perp QP \\ EC \perp QP \\ EC = (ABC) \cap (C_1PQ) \end{array}\right\} \Rightarrow \angle C_1EC = \angle((C_1PQ),(ABC))$$

$$CN \perp EC_1 \Rightarrow CN = \rho|C;(C_1PQ)|$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta CC_1E \\ \angle C = 90^0 \\ CC_1 = a \\ CE = \frac{3}{4}AC = \frac{3}{4}a\sqrt{2} \end{array}\right\} \Rightarrow CN = \frac{CE \cdot CC_1}{EC_1} = \frac{\frac{3a\sqrt{2}}{4} \cdot a}{\sqrt{a^2 + \frac{9a^2 \cdot 2}{16}}} = \frac{3a^2\sqrt{2} \cdot 4}{4 \cdot a\sqrt{2}\sqrt{17}} = \frac{3a}{\sqrt{17}}$$

б) (рис.15) $A_1 \in (A_1B_1C_1)$, $(A_1B_1C_1) \cap (C_1PQ) = b$, $b // QP$, $C_1E \cap AA_1 = A_2$,

$AA_2 : A_1A_2 = AE : A_1C_1 = 1:4$, $\Rightarrow$, $A_1A_2 = \frac{4a}{3}$.

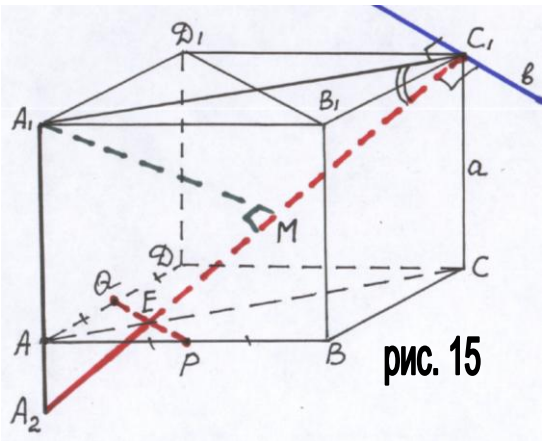


рис. 15

$$\left.\begin{array}{l} A_1C_1 \perp b \\ A_2C_1 \perp b \end{array}\right\} \Rightarrow \angle A_1C_1A_2 = \angle((A_1B_1C_1),(C_1PQ))$$

$A_1M \perp A_2C_1$, $\Rightarrow$, $A_1M = \rho/A_1,(C_1PQ)/$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta C_1A_1A_2\\ \angle A_1=90^0\\ A_1C_1=a\sqrt{2}\\ A_1A_2=\dfrac{4a}{3}\end{array}\right\}\Rightarrow A_1M=\frac{\frac{4a}{3}\cdot a\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{16a^2}{9}+2a^2}}=\frac{4a\cdot a\sqrt{2}}{3\cdot\frac{a}{3}\sqrt{34}}=\frac{4a}{\sqrt{17}}$$

в) (рис.16) $D\in(ABC)$, $(ABC)\cap(C_1PQ)=PQ$, $PQ\cap DC=T$, $TD : DC= 1 : 2$, $TC_1\cap DD_1=D_2$,

$DD_2 : DD_1 = 1 : 3$, $DD_2= a/3$.

$$\left.\begin{array}{l}DR\perp PQ\\ RD_2\perp PQ\end{array}\right\}\Rightarrow\angle D_2RD=\angle((ABC),(C_1PQ))$$

$DF\perp RD_2 \Rightarrow$, $DF=\rho/D,(C_1PQ)/$

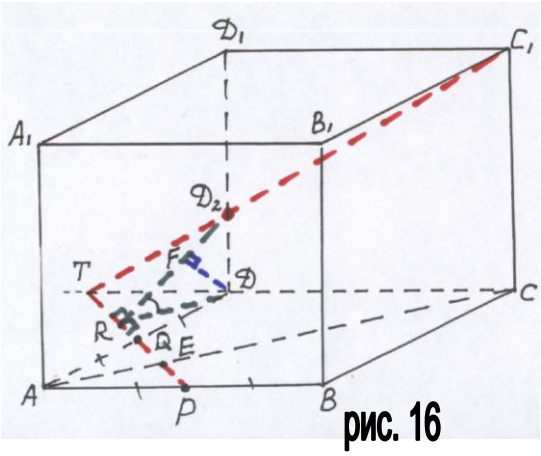


рис. 16

$$\left.\begin{array}{l}\Delta D_2DR\\ \angle D=90^0\\ DD_2=\dfrac{a}{3}\\ DR=\dfrac{a}{2\sqrt{2}}\end{array}\right\}\Rightarrow DF=\frac{\frac{a}{3}\cdot\frac{a}{2\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{a^2}{9}+\frac{a^2}{8}}}=\frac{\frac{a}{3}\cdot\frac{a}{2\sqrt{2}}}{\frac{a\sqrt{17}}{3\cdot2\sqrt{2}}}=\frac{a}{\sqrt{17}}$$

Ответ: $\frac{3a}{\sqrt{17}}$; $\frac{4a}{\sqrt{17}}$; $\frac{a}{\sqrt{17}}$

<u>Задача №6.</u> (рис. 17) В основании пирамиды MABCD лежит прямоугольник, её боковое ребро MB перпендикулярно плоскости основания и AB : AD : MB = = 1 : 2 : 1. Считая AB = *a*, найдите расстояние до плоскости MCD от точки P, где точка P лежит на диагонали BD и отношение BP : BD равно:

а) 1 : 4; б) 1 : 2; в) 3 : 4.

Решение.

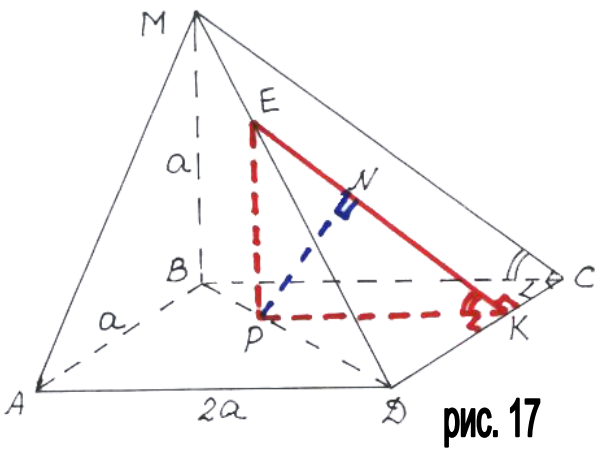


рис. 17

AB = MB = a, AD = 2a.

$$\left.\begin{array}{l} BC \perp DC \\ MC \perp DC \\ DC = (ABC) \cap (MDC) \end{array}\right\} \Rightarrow \angle MCB = \angle((ABC),(MDC))$$

Проведём через точку P прямую PK, PK//BC, PE//BM, ∠EKP = ∠MCB.

PN⊥EK, PN = ρ|P,(MCD)|.

а) BP : BD = 1 : 4.

$$\Delta EPK,\ \angle P = 90^0,\quad PE = \frac{3}{4}a,\quad PK = \frac{3}{4}\cdot 2a = \frac{3a}{2},\quad EK = \sqrt{\frac{9}{16}a^2 + \frac{9}{4}a^2} = \frac{3a}{4}\sqrt{5}$$

$$\rho|P,(MCD)| = \frac{\frac{3}{4}a\cdot\frac{3}{2}a}{\frac{3a\sqrt{5}}{4}} = \frac{3a\sqrt{5}}{10}$$

б) BP : BD = 1 : 2

$$\Delta EPK,\ \angle P = 90^0,\quad PE = \frac{1}{2}a,\quad PK = \frac{1}{2}\cdot 2a = a,\quad EK = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{5}$$

$$\rho|P,(MCD)| = \frac{\frac{1}{2}a\cdot a}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{a\sqrt{5}}{5}$$

в) BP : BD = 3 : 4

$$\Delta EPK,\ \angle P = 90^0,\quad PE = \frac{1}{4}a,\quad PK = \frac{1}{4}\cdot 2a = \frac{a}{2},\quad EK = \sqrt{\frac{1}{16}a^2 + \frac{1}{4}a^2} = \frac{a}{4}\sqrt{5}$$

$$\rho|P,(MCD)| = \frac{\frac{1}{4}a\cdot\frac{1}{2}a}{\frac{a\sqrt{5}}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{10}$$

Ответ: $\frac{3a\sqrt{5}}{10}$, $\frac{a\sqrt{5}}{5}$, $\frac{a\sqrt{5}}{10}$

Если в пространстве выбрана прямоугольная система координат и плоскость β задана в этой системе уравнением $ax + by + cz + d = 0$, а искомая точка имеет координаты $M_0(x_0, y_0, z_0)$, то расстояние от точки M_0 до плоскости β выражается формулой: $\rho|\beta, M_0| = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Задача №7. (МИФИ). Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 12. На рёбрах AA_1, B_1C_1, CD взяты точки E, F_1 и G такие, что $AE : EA_1 = 1 : 3$, $B_1F_1 : F_1C_1 = 1 : 1$, $CG : GD = 1 : 1$. Найти расстояние от точки B_1 до плоскости (EF_1G).

Решение.

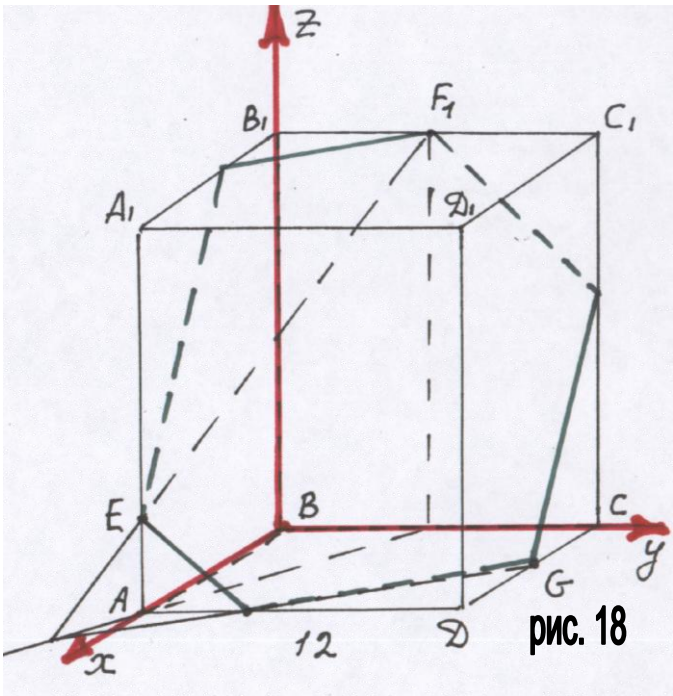


рис. 18

Введём прямоугольную систему координат как показано на рисунке. Тогда E(12;0;3), G(6;12;0), F_1(0;6;12). Составим уравнение плоскости (EF_1G). Строить эту плоскость нет необходимости. В уравнение

$ax + by + cz + d = 0$

подставим координаты точек E, G, F_1:

$$\begin{cases} 12a + 3c + d = 0 \\ 6a + 12b + d = 0 \\ 6b + 12c + d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6b = -12c - d \\ 6a = 24c + 2d - d = 24c + d \\ 48c + 2d + 3c + d = 0 \end{cases}$$

$1)\, 51c = -3d \quad c = -\frac{3d}{51} = -\frac{d}{17}$ $\qquad 2)\, 6a = -\frac{24d}{17} + d = -\frac{7d}{17}, \quad a = -\frac{7d}{102}$

$3)\, 6b = \frac{12d}{17} - d = -\frac{5d}{17} \quad b = -\frac{5d}{102}$

Уравнение плоскости:

$$-\frac{7d}{102}x - \frac{5d}{102}y - \frac{6d}{102}z + d = 0 \quad 7x + 5y + 6z - 102 = 0$$

B_1(0;0;12)

$$\rho\left|B_1, (EF_1G)\right| = \frac{\left|0 + 0 + 6 \cdot 12 - 102\right|}{\sqrt{49 + 25 + 36}} = \frac{30}{\sqrt{110}} = \frac{3\sqrt{110}}{11}$$

Ответ: $\rho\left|B_1, (EF_1G)\right| = \frac{3\sqrt{110}}{11}$

2.4. Расстояние между двумя прямыми.

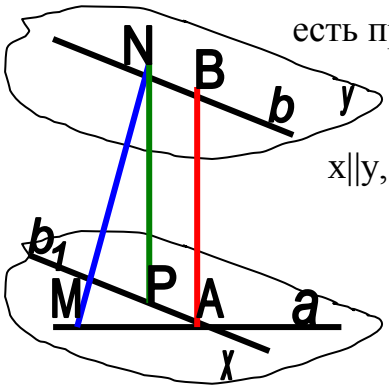
В пространстве прямые могут пересекаться, тогда расстояние между ними равно нулю. Могут быть параллельными, тогда они лежат в одной плоскости и расстояние между ними равно расстоянию от любой точки одной прямой до другой прямой, причём это расстояние не зависит от выбора точки, так как в планиметрии существует теорема, гласящая, что отрезки параллельных прямых, заключённые между двумя другими параллельными прямыми, равны. А как найти расстояние от точки до прямой, разобрано в пункте 2.2.

Наиболее интересным и сложным является случай скрещивающихся прямых. Скрещивающиеся прямые - это удивительно! Если бы их не было, стереометрия была бы во сто крат менее интересной. Сколько у них глобальных, интереснейших свойств! Во-первых, всякие две скрещивающиеся прямые лежат в двух параллельных плоскостях. Возьмём теперь точку, не принадлежащую ни одной из этих плоскостей. Оказывается, что существует прямая, проходящая через взятую точку и пересекающая обе скрещивающиеся прямые. Но мало того, эта прямая ещё и единственная! В-третьих, у всяких двух скрещивающихся прямых имеется общий перпендикуляр, вот он то и берётся за расстояние между двумя этими скрещивающимися прямыми.

Итак, расстояние между двумя скрещивающимися прямыми – длина их общего перпендикуляра.

Докажем это.

Пусть прямая a скрещивается с прямой b. Проведём через эти прямые параллельные плоскости x и y, $a \subset$ x, $b \subset y$. Проекция прямой b на плоскость x есть прямая b_1, $b_1 || b$, $a \cap b_1 = A$. Точка A – проекция некоторой точки B прямой b. AB – искомая прямая, так как $AB \perp$ x, x||y, $\Rightarrow$, $AB \perp y$, $\Rightarrow$, $AB \perp a$, $AB \perp b$.



Докажем единственность общего перпендикуляра методом от противного. Пусть существует другая прямая MN отличная от AB и перпендикулярная двум скрещивающимся прямым, тогда $AB \perp x$, $MN \perp x$, $\Rightarrow$, $AB // MN$ и они определяют плоскость, в которой лежат прямые

a и b, но это противоречит условию, по которому прямые скрещиваются и не могут лежать в одной плоскости. Полученное противоречие показывает, что наше утверждение неверно и общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых единственный. **Ч.т.д.**

А теперь докажем, что общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых можно взять за расстояние между ними. Для этого достаточно доказать, что $AB<MN$, где MN расстояние между произвольными точками прямых. Перенесём AB параллельно в точку N – NP, $NP = AB$, $NP < MN$, так как NP перпендикуляр к плоскости x, а MN – наклонная.

Заметим, что расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию между параллельными плоскостями, содержащими данные прямые.

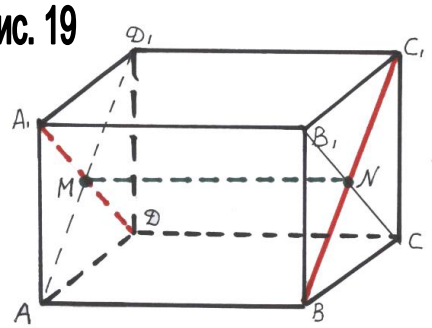
Интересно отметить, что если между скрещивающимися электрическими проводами проскакивает искра, то она проходит по общему перпендикуляру этих проводов. Такое явление обусловлено стремлением электрического заряда находить кратчайший путь.

Теперь перейдём к решению задач на нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми. В некоторых из них общий перпендикуляр легко строится и его длина вычисляется без проблем.

<u>Задача № 7.</u> (рис.19) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте общий перпендикуляр прямых A_1D и BC_1.

Найдите расстояние между прямыми, если ребро куба равно a.

рис. 19



Решение.

$AD_1 \cap DA_1 = M$, $BC_1 \cap CB_1 = N$, $MN \perp AD_1$, $MN \perp BC_1$, так как $MN \parallel A_1B_1$, а A_1B_1 перпендикулярна граням куба, в которых лежат искомые прямые, $MN = \rho|A_1D, BC_1|$, $MN = a$.

В некоторых задачах построение общего перпендикуляра затруднено и можно применить другие подходы к решению задач. Например, **координатный метод.**

Задача № 8. (рис.20)(Новосибирский государственный университет). Найдите расстояние между диагоналями AD_1 и DC_1 двух смежных граней куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a.

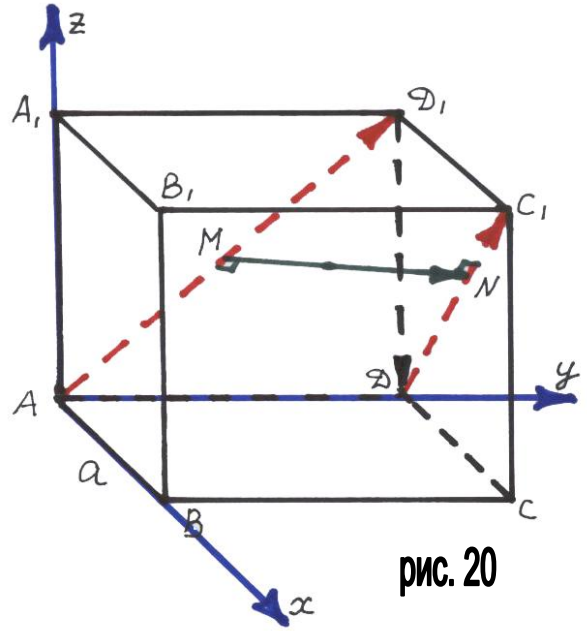


рис. 20

Решение.

Поместим куб в декартову систему координат, как показано на рисунке. Тогда $A(0;0;0)$, $D(0;a;0)$, $D_1(0;a;a)$, $C_1(a;a;a)$. Пусть MN – общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых, то есть, $MN \perp AD_1$, $MN \perp DC_1$. Тогда

$$\overline{AD_1}(0;a;a),\quad \overline{DC_1}(a;0;a),\quad \overline{D_1D}(0;0;-a)$$

$$\overline{MN} = \overline{MD_1} + \overline{D_1D} + \overline{DN} = x\overline{AD_1} + \overline{D_1D} + y\overline{DC_1} = x\overline{(0;a;a)} + \overline{(0;0;-a)} + y\overline{(a;0;a)} =$$
$$= \overline{(ya;xa;xa-a+ya)}$$

$$\overline{MN} \perp \overline{AD_1} \Rightarrow \overline{MN}\cdot\overline{AD_1} = 0 \Rightarrow 0 + xa^2 + xa^2 - a^2 + ya^2 = 0$$

$$\overline{MN} \perp \overline{DC_1} \Rightarrow \overline{NM}\cdot\overline{DC_1} = 0 \Rightarrow ya^2 + xa^2 - a^2 + ya^2 = 0$$

$$\begin{cases} xa^2 + xa^2 - a^2 + ya^2 = 0, \\ ya^2 + xa^2 - a^2 + ya^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xa^2 - ya^2 = 0, \\ 2ya^2 + xa^2 - a^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y, \\ 3xa^2 - a^2 = o \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{3}$$

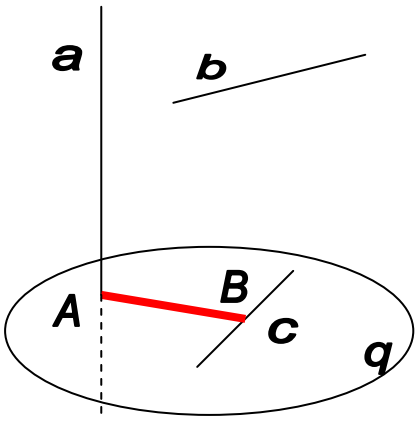
$$\overline{MN}\left(\frac{a}{3};\frac{a}{3};\frac{a}{3}\right), \Rightarrow, \quad NM = \sqrt{\frac{a^2}{9} + \frac{a^2}{9} + \frac{a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Ответ: $\rho\left|AD_1, DC_1\right| = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

При решении задач №7 из экзаменационных работ, которые предлагаются абитуриентам при поступлении в Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана хороший результат приносит **следующий подход при вычислении расстояния между скрещивающимися прямыми:**

- выбирается или строится плоскость, перпендикулярная одной из двух прямых, тогда эта прямая проецируется на выбранную плоскость в точку, а другая – в некоторую прямую;

- проводится перпендикуляр из полученной точки к проекции прямой. Это и есть расстояние между скрещивающимися прямыми.



a и b – скрещивающиеся прямые, q – плоскость, $a \perp q$, c – $пр_q b$, A – $пр_q a$, $AB \perp c$, $AB = \rho|a,b|$

<u>Задача № 9 (рис.21)</u> МГТУ им. Н.Э. Баумана. В сферу радиуса R вписана пирамида TABC, основанием которой служит прямоугольный треугольник ABC, а высота пирамиды совпадает с ребром TA. Боковое ребро TB образует с высотой пирамиды угол 60°. А угол между TB и медианой основания CD, проведённой к гипотенузе AB, равен 45°. Какую **наименьшую** площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через медиану CD и пересекающей ребро TB?

Решение.

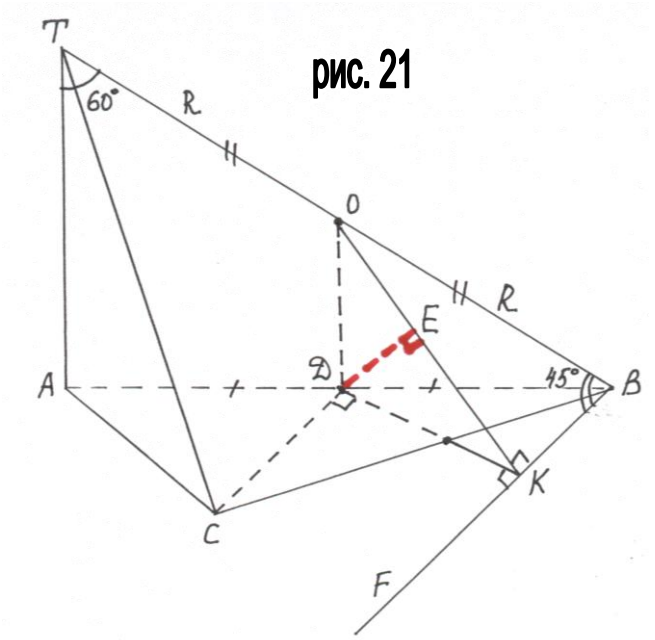


рис. 21

1) TABC – пирамида, $TA \perp (ABC)$. $\angle ACB = 90°$, $\angle ATB = 60°$, CD – медиана основания. $\angle(CD,TB) = 45°$ Не будем строить сферу, в которую вписана пирамида. Центр сферы – середина ребра TB, TO = OB = R.

2) Проведём $BF \parallel CD$, $\angle(CD,TB) = \angle(BF,TB) = \angle TBF = 45°$. Сечение пирамиды плоскостью, проходящей через медиану CD и пересекающей ребро TB – треугольник с постоянным основанием CD имеет наименьшую площадь, если высота, проведённая к CD будет наименьшей из всех возможных.

Это выполняется, если высота есть **расстояние между скрещивающимися прямыми CD и TB.**

3) Пусть DK ⊥ BF, DK – пр$_{(ABC)}$OK, ⇒, OK ⊥ BF.

Рассмотрим плоскость (ODK), BK ⊥ (ODK), ⇒, CD ⊥ (ODK)

$$\left.\begin{array}{l} D - пр_{(ODK)} CD \\ OK - пр_{(ODK)} OB \end{array}\right\} \Rightarrow \rho|CD;TB| = \rho|D;OK| = OE$$, где OE ⊥ OK.

4) $\Delta ODB \quad \angle D = 90^0, \quad \angle B = 30^0, \quad OD = \frac{R}{2}, \quad DB = R \cdot \cos 30^0 = \frac{R\sqrt{3}}{2} = CD$

5) $\Delta OKB \quad OK = KB = \frac{R}{\sqrt{2}}$

6) $\Delta ODK \quad DK = \sqrt{\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{4}} = \frac{R}{2} \quad DE = \frac{OD \cdot DK}{OK} = \frac{\frac{R}{2} \cdot \frac{R}{2}}{\frac{R}{\sqrt{2}}} = \frac{R\sqrt{2}}{4}$

7) $S_{\min} = \frac{1}{2} \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{R\sqrt{2}}{4} = \frac{R^2\sqrt{6}}{16}$

Ответ: $S_{\min} = \frac{R^2\sqrt{6}}{16}$

2.5. Расстояние от прямой до плоскости.

Если прямая лежит в плоскости или пересекает её, то расстояние от прямой до плоскости равно нулю. Остаётся рассмотреть случай, когда прямая параллельна плоскости. В этом случае за расстояние от прямой до плоскости берут расстояние от любой (наиболее удобной для решения задачи) точки прямой до плоскости, то есть задача сводится к нахождению расстояния от точки до плоскости (п.2.3).

Докажем, что расстояние между прямой и параллельной ей плоскостью равно расстоянию от произвольной точки прямой до данной плоскости.

Доказательство.

Пусть $a//\beta$, и $a\not\subset\beta$. Проедём из произвольных точек A и B прямой a перпендикуляры к плоскости β. $AA_1\perp\beta$, $BB_1\perp\beta$, тогда $AA_1//BB_1$ (две прямые перпендикулярные одной плоскости параллельны) и $AB//A_1B_1$ (если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой), то $AA_1=BB_1$. Это значит, что расстояние от точки, принадлежащей прямой a, до плоскости β не зависит от выбора точки на данной прямой.

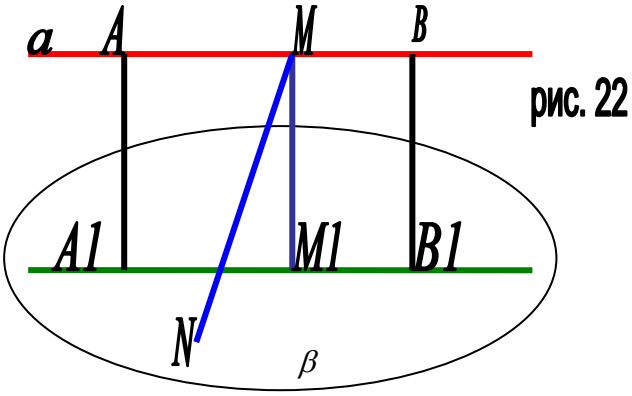


рис. 22

Рассмотрим теперь отрезок MN, соединяющий произвольную точку M прямой *a* с точкой N, принадлежащей плоскости, и не перпендикулярный плоскости β. Пусть M_1 – проекция точки M на плоскость β, тогда $MM_1 < MN$, следовательно, MM_1 – расстояние между a и β. **Ч.т.д.**

Задача № 10. (МГТУ им. Н.Э. Баумана). Основанием пирамиды TABC служит равносторонний треугольник со стороной, равной 8, а её высота проходит через середину стороны основания AB. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через боковое ребро TA, если известно, что **прямая,** проходящая через середину высоты пирамиды и середину стороны основания BC, **параллельна секущей плоскости и находится от неё на расстоянии, равном 1.**

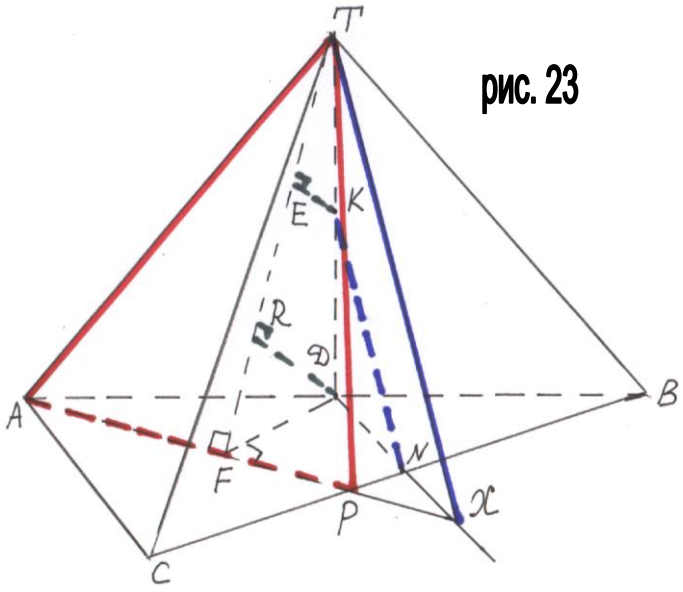


рис. 23

Решение.

1) (рис.23) TABC – пирамида, ΔABC – правильный, AB = 8, D – середина AB, TD⊥(ABC). K – середина TD, N – середина BC. Найдём в плоскости сечения прямую параллельную KN. В плоскости (TDN) проведём через точку T прямую TX // KN, X=TX∩DN. AX∩CB=P, ΔAPT – искомое сечение.

Проведём DF⊥AX, ⇒, TF⊥AX, AX=(ATP)∩(ABC), ∠TFD=∠((ATP),(ABC)), точка K лежит в плоскости этого угла, KE⊥TF, ⇒, KE = ρ| K,(ATP)| = ρ| KN,(TAP)| =1.

DR⊥TF, DR=2. $S_{TAP} = \frac{1}{2} AP \cdot TF$

2) (рис.24)

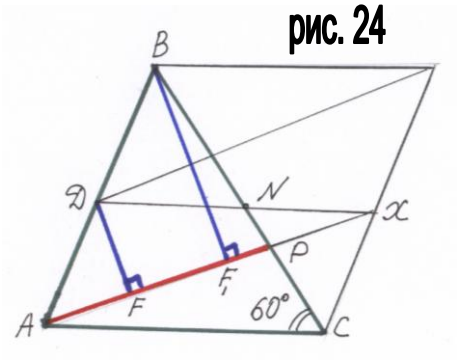


рис. 24

BP : PC = 2 : 1, $S_{ABC} = \frac{64\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}$,

$S_{ABP} = \frac{2}{3} S_{ABC} = \frac{32}{\sqrt{3}}$

ΔAPC, AC = 8, PC=8/3, ∠C=60°, по теореме косинусов

$$AP = \sqrt{64 + \frac{64}{9} - 2 \cdot 8 \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{8\sqrt{7}}{3}$$

$$S_{ABP} = \frac{1}{2} AP \cdot BF_1 = \frac{32}{\sqrt{3}}, \quad BF_1 = \frac{2 \cdot 32 \cdot 3}{\sqrt{3} \cdot 8\sqrt{7}} = \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

$$DF = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

3) ΔFDT (рис.25), $FR = \sqrt{\frac{16 \cdot 3}{7} - 4} = \sqrt{\frac{48-28}{7}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$

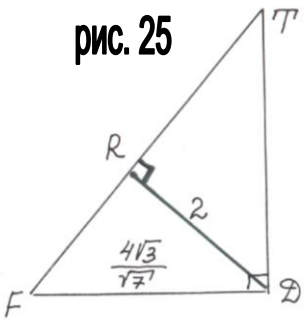


рис. 25

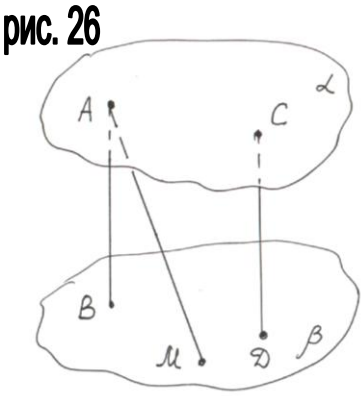
$$TF = \frac{FD^2}{FR} = \frac{\frac{16 \cdot 3}{7}}{\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{7}}} = \frac{24}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{5}} \quad S_{TAP} = \frac{1}{2} \cdot \frac{24}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{5}} \cdot \frac{8\sqrt{7}}{3} = \frac{32}{\sqrt{5}}$$

Ответ: $S_{TAP} = \frac{32}{\sqrt{5}}$

2.6. Расстояние между плоскостями.

Если две плоскости совпадают или пересекаются, то расстояние между ними равно нулю. Расстояние между двумя параллельными плоскостями равно расстоянию от произвольной точки одной плоскости до другой плоскости, то есть нахождение расстояния опять сводится к нахождению расстояния от точки до плоскости.

рис. 26

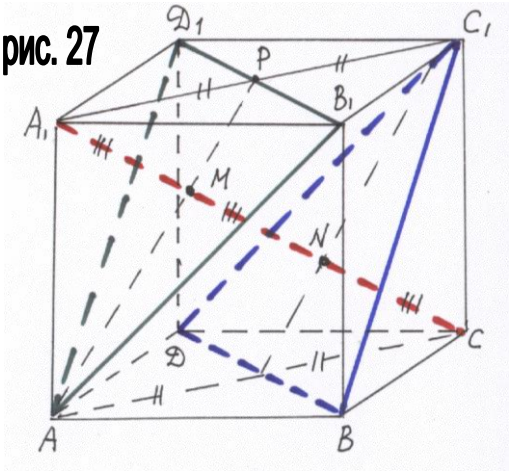


Доказательство.

Пусть плоскости α и β параллельны (рис.26). Проведём из произвольных точек A и C плоскости α перпендикуляры AB и CD к плоскости β, тогда AB=CD (аналогично п.2.5). То есть, длина перпендикуляра не зависит от выбора точки. Пусть M – произвольная точка плоскости β и AM не перпендикулярен β, тогда AM – наклонная, AB⊥β, AB<AM, AB – расстояние между плоскостями.

Задача № 11. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти расстояние между плоскостями AB_1D_1 и BDC_1, если $AB = a$. (рис.27)

рис. 27



Решение.

$(AB_1D_1)//(BDC_1)$.

Диагональ A_1C перпендикулярна этим плоскостям, так как $\mathbf{A_1C \perp D_1B_1}$ и $\mathbf{A_1C \perp AD_1}$, $D_1B_1 \cap AD_1 = D_1$, ⇒, $A_1C \perp (AB_1D_1)$, ⇒, $A_1C \perp (BDC_1)$

Докажем, что $\mathbf{A_1C \perp D_1B_1}$ (остальное доказывается аналогично)

$$\left.\begin{array}{l} A_1C_1 - np_{(A_1D_1B_1)}A_1C \\ A_1C_1 \perp D_1B_1 \end{array}\right\} \Rightarrow A_1C \perp D_1B_1$$

$A_1C \cap (AB_1D_1) = M$, $A_1C \cap (BDC_1) = N$, $MN = \rho|(AB_1D_1),(BDC_1)|$,

По теореме Фалеса $A_1M = MN = NC$

$$MN = \frac{1}{3}A_1C = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Ответ: $\rho|(AB_1D_1),(BDC_1)| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Вернёмся к вопросу нахождения расстояния между плоскостью и параллельной ей прямой. Если через прямую провести плоскость, параллельную данной плоскости, то можно находить расстояние между прямой и плоскостью как расстояние между параллельными плоскостями.

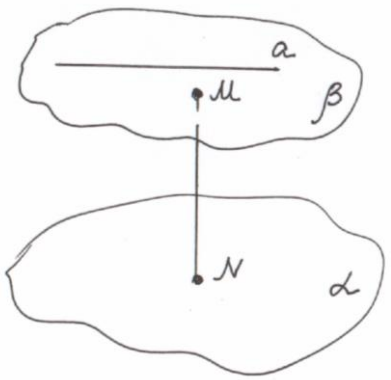


рис. 28

Такой подход помогает решить достаточно сложные задачи.

$a \parallel \alpha$, построим плоскость $\beta \parallel \alpha$, $a \subset \beta$.

$\rho|a,\alpha| = \rho|\alpha,\beta|$

<u>Задача № 12.</u> (МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004 год). Найдите площадь сечения правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью, которая параллельна диагонали A_1C боковой грани AA_1C_1C, проходит через середину стороны BC основания ABC и точку M, лежащую на стороне AB, если AM = 2MB, расстояние между A_1C и секущей плоскостью равно 2, а высота призмы равна $2\sqrt{3}$? (рис.29)

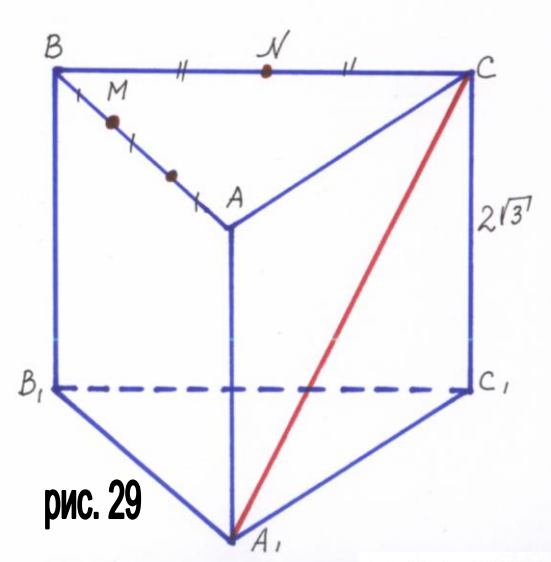


рис. 29

Решение.

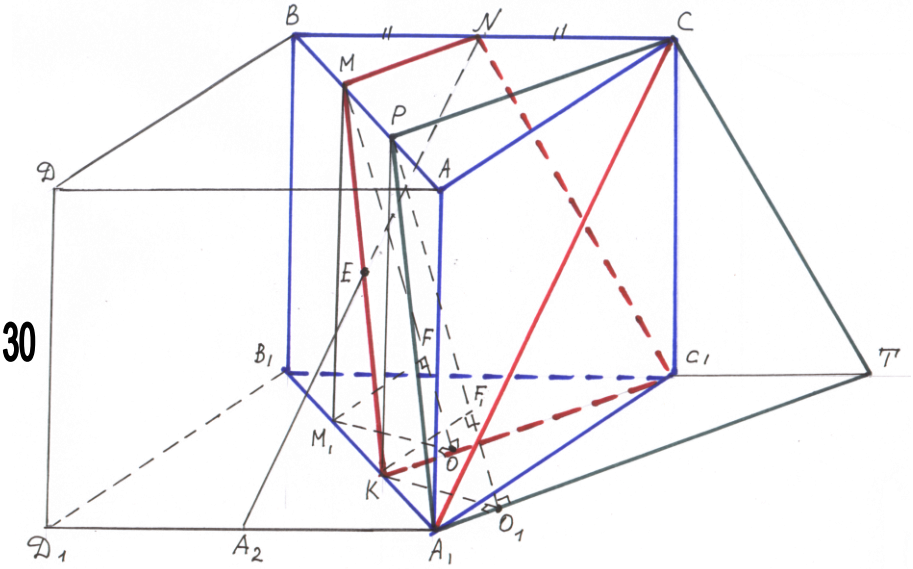


рис. 30

1) Достроим призму до параллелепипеда как показано на рис.30.

$A_2N \parallel A_1C$, A_2 – середина D_1A_1, N – середина BC, $A_2N \cap (B_1BA) = E$ (так как $A_2N \subset (BCA_1)$, $(BCA_1) \cap (BB_1A) = BA_1$, $BA_1 \cap A_2N = A_2N \cap (B_1BA) = E$),

$ME \cap A_1B_1 = K$, $KC_1 \parallel MN$, NC_1, MNC_1K – искомое сечение (в нём $EN \parallel A_1C$).

$P \in AB$, $BM = MP = PA$.

$(CPA_1) \parallel (MNC_1)$, $A_1C \subset (CPA_1)$, $\Rightarrow$,

$\rho|A_1C, (MNC_1)| = \rho|(CPA_1),(MNC_1)| = \rho|K,(CPA_1)|$

$MM_1 \perp B_1A_1$, $M_1O \perp KC_1$, $\Rightarrow$, $MO \perp KC_1$, MO – высота трапеции MNC_1K, $M_1F \perp MO$, $PK // MM_1$, $KO_1 \perp A_1T$, $KO_1 = M_1O$, $KF_1 \perp PO_1$, $\Rightarrow$,

$KF_1 = M_1F = \rho|K,(CPA_1)| = \rho|A_1C, (MNC_1)| = 2$.

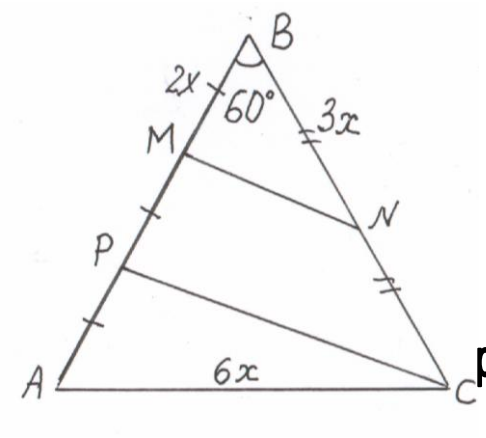


рис. 31

2) Пусть AB = 6x, тогда MB = 2x, BN = 3x.

ΔMBN: (рис.30)

$MN^2 = 4x^2 + 9x^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3x \cdot \cos 60°$

$MN^2 = 13x^2 - 6x^2 = 7x^2$, $MN = x\sqrt{7}$,

$PC = 2x\sqrt{7}$.

3) $\Delta M_1 B_1N_1$: (рис.32)

$$S_{M_1B_1N_1} = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot 3x \cdot \sin 60^0 = \frac{3x^2\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{M_1B_1N_1} = \frac{1}{2} \cdot M_1N_1 \cdot B_1O_2 = \frac{B_1O_2 \cdot x\sqrt{7}}{2}$$

$$B_1O_2 = \frac{3x\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = KO_1$$

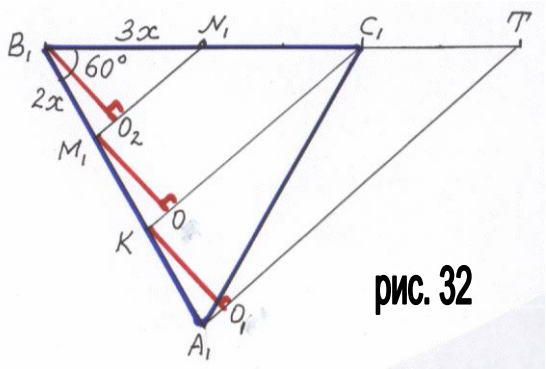


рис. 32

4) ΔPKO_1 (рис.33):

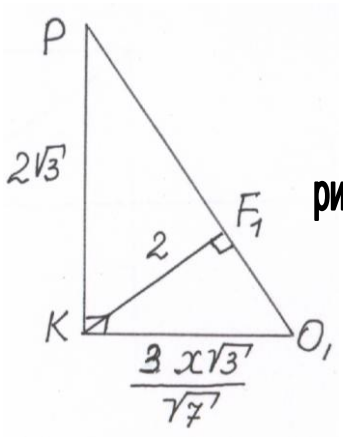


рис. 33

$$KF_1 = \frac{KP \cdot KO_1}{PO_1}, \Rightarrow, PO_1 = \frac{KP \cdot KO_1}{KF_1} = \frac{2\sqrt{3} \cdot \frac{3x\sqrt{3}}{\sqrt{7}}}{2} = \frac{9x}{\sqrt{7}} = MO$$

$$PF_1 = \sqrt{12-4} = 2\sqrt{2}, \quad PF_1 \cdot F_1O_1 = KF_1^2, \quad F_1O_1 = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$PO_1 = 2\sqrt{2} + 2 = 3\sqrt{2} = \frac{9x}{\sqrt{7}}, \quad x = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{7}}{3}$$

5) $S_{сеч} = \frac{MN + KC_1}{2} \cdot MO = \frac{x\sqrt{7} + 2x\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{9x}{\sqrt{7}} = \frac{27x^2}{2} = \frac{27 \cdot 2 \cdot 7}{2 \cdot 9} = 21$

Ответ: $S_{сеч}=21$

Список литературы.

1. В.Н.Литвиненко, Г.К.Безрукова. Задачи по стереометрии 10-11 класс. Готовимся к единому государственному экзамену. М.: «Школьная Пресса», 2005.
2. А.Гайштут, Г.Литвиненко. Стереометрия 10-11 класс. Задачник к школьному курсу. М.: «АСТ-ПРЕСС», 1998.
3. В.Н.Костицин. Практические занятия по стереометрии. Задачи ЕГЭ по стереометрии. Учебное пособие. М.: Издательство «ЭКЗАМЕН», 2004.
4. И.Л.Никольская, Е.Е.Семёнов. Учимся рассуждать и доказывать. Книга для учащихся 6 – 10 классов средней школы. М.: «Просвещение», 1989.
5. М. Шабунин. Математика для поступающих в вузы. М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002.