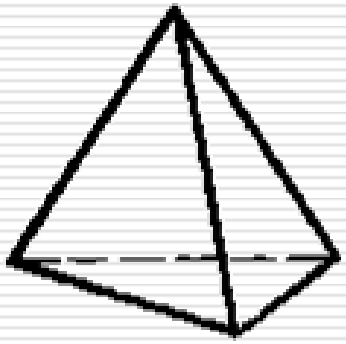
Правильные многогранники

Какой многогранник называется правильным?

- *Выпуклый многогранник называется правильным, если все его грани равные между собой правильные многоугольники и число ребер, выходящих из каждой вершины, одинаково.*

«Правильных многогранников вызывающе мало».

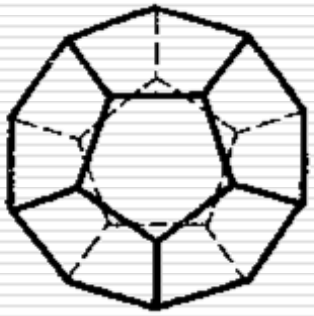


Тетраэдр

Октаэдр

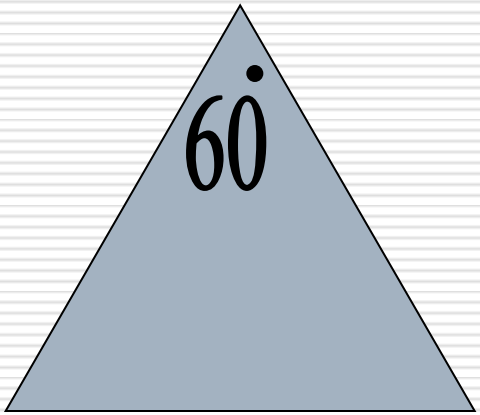
Икосаэдр

Куб

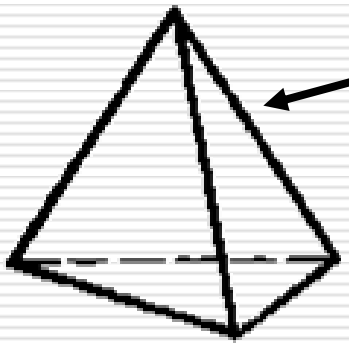


Додекаэдр

Грань - треугольник



$$к \geq 3, к \in N,$$
$$60° \cdot к < 360°$$

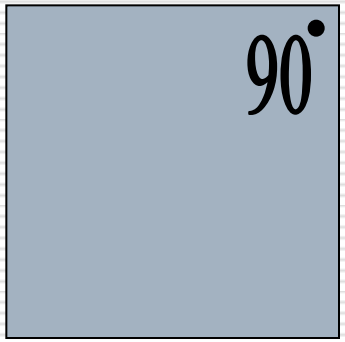


к=3 (*тетраэдр*)

к=4 (*октаэдр*)

к=5 (*икосаэдр*)

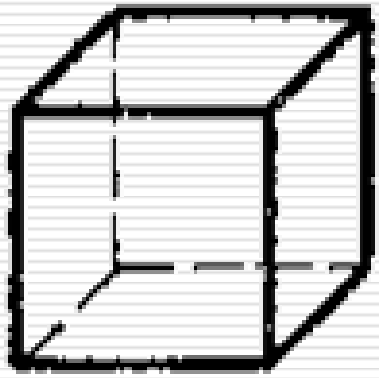
Грань - квадрат



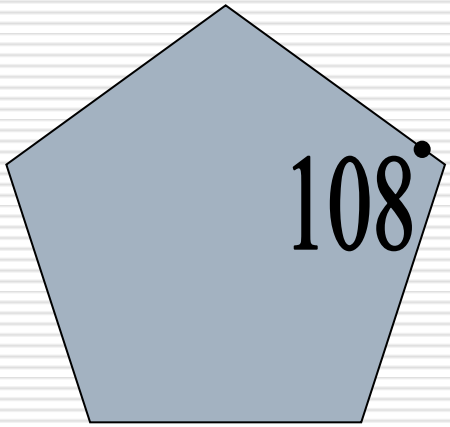
$к \geq 3, к \in N,$

$90° \cdot к < 360°$

$к = 3$ (*куб*)



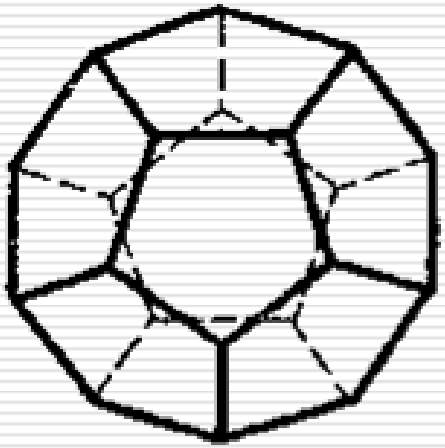
Грань - пятиугольник



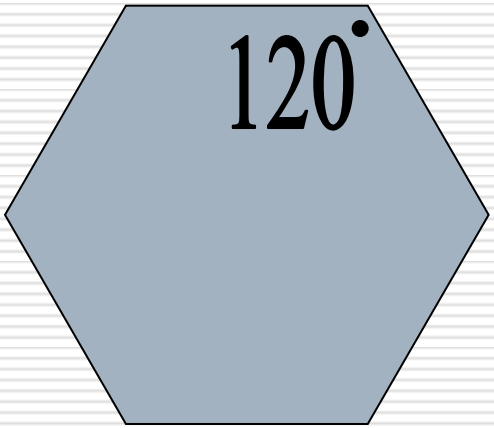
$к \geq 3, к \in N,$

$108° \cdot к < 360°$

$к=3$ (додекаэдр)



Грань - шестиугольник



$к \geq 3, к \in N,$

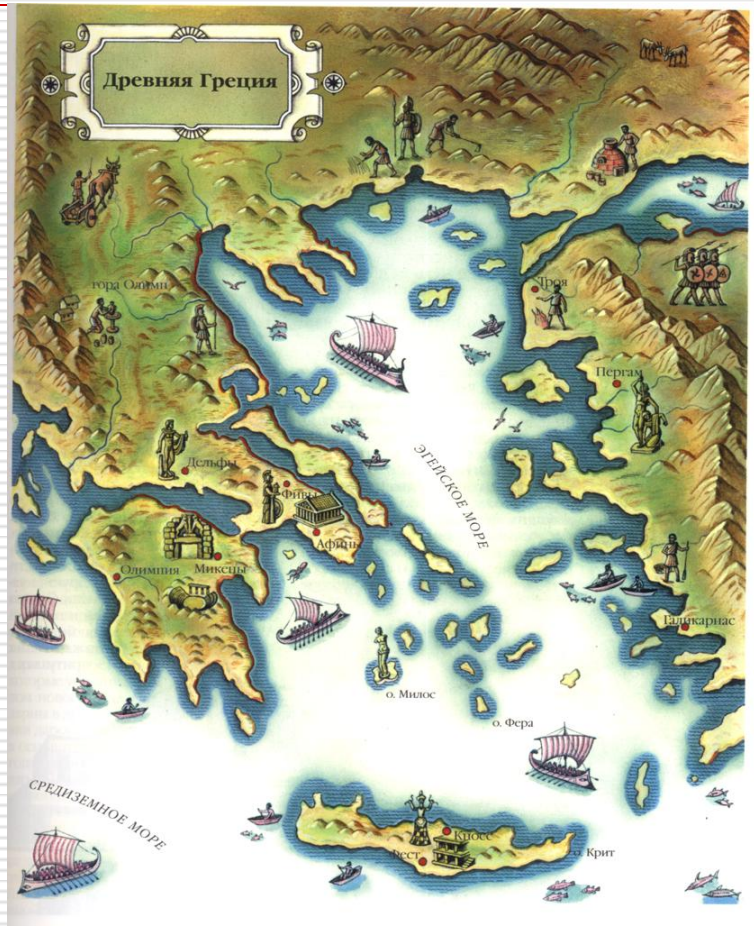
$120° \cdot к < 360°$

Таких ***к*** *нет!*

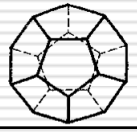
Нет решений и при $к \geq 7$.

Названия пришли из Греции

- **Тетраэдр – четырёхгранник**
- **Гексаэдр – шестигранник**
- **Октаэдр – восьмигранник**
- **Додекаэдр – двенадцатигранник**
- **Икосаэдр - двадцатигранник**



Грани, вершины, рёбра

Вид	Г (грани)	В (вершины)	Р (рёбра)	Г + В - Р
	4	4	6	**2**
	6	8	12	**2**
	8	6	12	**2**
	12	20	30	**2**
	20	12	30	**2**

Леонард Эйлер

В + Г - Р = 2

Их опять всего пять

Если в каждой из вершин сходится по x рёбер и грань – правильный n -угольник, то

$$x \cdot B = 2P \quad или \quad B = \frac{2P}{x}, \qquad n \cdot Г = 2P \quad или \quad Г = \frac{2P}{n}$$

По теореме Эйлера: **В + Г – Р = 2**, то есть

$$\frac{2P}{x} + \frac{2P}{n} - P = 2, \quad или \quad (делим \ на \ 2P)$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} = \frac{1}{P}, \quad или, \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{n} = \frac{1}{P} + \frac{1}{2} \quad (*)$$

Их опять всего пять

$n \geq 3$ и $x \geq 3$. Если одновременно n>3, и x > 3, то

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{x}\leq\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

что делает равенство (*) невозможным. Отсюда следует, **что либо n = 3, либо x = 3.**

Их опять всего пять

Пусть n = 3 ,тогда равенство (*) примет вид:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{3}=\frac{1}{P}+\frac{1}{2}$$

Если x = 3**, то это - **тетраэдр

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{1}{P}+\frac{1}{2},\quad \frac{1}{P}=\frac{2}{3}-\frac{1}{2},\quad \frac{1}{P}=\frac{1}{6},\quad P=6,\Rightarrow,\ \Gamma=\frac{2P}{3}=4$$

Если x = 4**, то это - **октаэдр

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{1}{P}+\frac{1}{2},\ \frac{1}{P}=\frac{7}{12}-\frac{1}{2},\quad \frac{1}{P}=\frac{1}{12},\quad P=12,\quad \Gamma=\frac{24}{3}=8.$$

Их опять всего пять

Если x = 5**, то это - **икосаэдр

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{3}=\frac{1}{P}+\frac{1}{2},\quad \frac{1}{P}=\frac{8}{15}-\frac{1}{2}=\frac{1}{30},\quad P=30,\quad \Gamma=\frac{60}{3}=20$$

***Если x = 6**, то решения нет*

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{P}+\frac{1}{2},\quad \frac{1}{P}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0.$$

Их опять всего пять

Пусть x = 3, тогда равенство (*) примет вид:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{n}=\frac{1}{P}+\frac{1}{2}.$$

Если n = 3*, то это* ***- тетраэдр.***

Если n = 4*, то это* ***- гексаэдр (куб)***

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{1}{P}+\frac{1}{2},\quad \frac{1}{P}=\frac{1}{12},\quad P=12,\quad \Gamma=\frac{2P}{n}=\frac{24}{4}=6$$

Их опять всего пять

Если n = 5**, то это – **додекаэдр

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{1}{P}+\frac{1}{2},\quad \frac{1}{P}=\frac{8}{15}-\frac{1}{2}=\frac{1}{30},\quad P=30,\quad \Gamma=\frac{60}{4}=12$$

***Если n = 6 (или n > 6),** то*

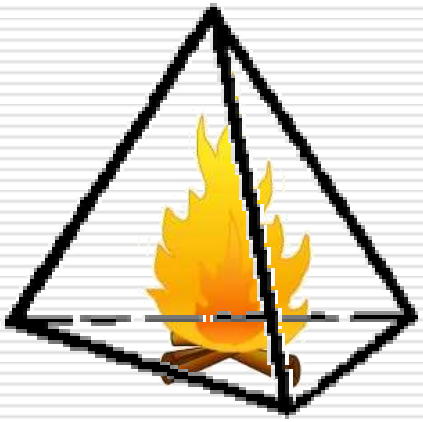
$$\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{P}+\frac{1}{2},\quad \frac{1}{P}=0\quad (\text{или}\quad \frac{1}{P}<0)$$

*Значит **не существует** других видов правильных многогранников.*

Размышления Рене Декарта

Вид многогранника	Количество вершин	Сумма плоских углов при одной вершине (А)	Угловые дефекты	Сумма всех угловых дефектов
Тетраэдр	4	$60^\circ \cdot 3 = 180^\circ$	180°	$180^\circ \cdot 4 = 720^\circ$
Куб	8	$90^\circ \cdot 3 = 270^\circ$	90°	$90^\circ \cdot 8 = 720^\circ$
Октаэдр	6	$60^\circ \cdot 4 = 240^\circ$	120	$120^\circ \cdot 6 = 720^\circ$
Додекаэдр	20	$108^\circ \cdot 3 = 324^\circ$	36°	$36^\circ \cdot 20 = 720^\circ$
Икосаэдр	12	$60^\circ \cdot 5 = 300^\circ$	60°	$60^\circ \cdot 12 = 720^\circ$

Платоновы тела

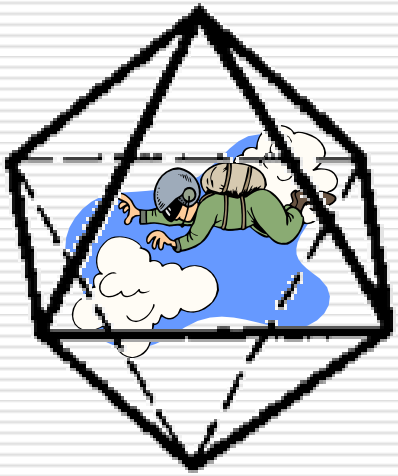


Тетраэдр символизировал огонь, т.к. его вершина устремлена вверх.

Икосаэдр - воду, т.к. он самый "обтекаемый".

Платоновы тела

Куб символизировал землю,
как самый "устойчивый".



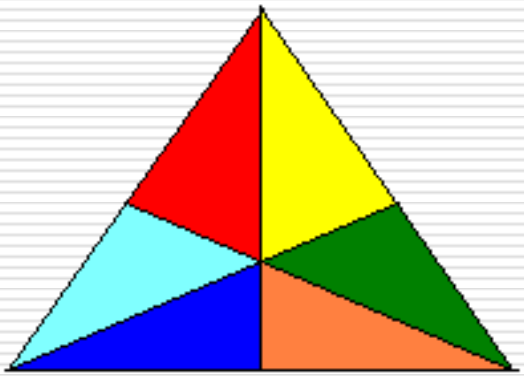
Октаэдр - воздух,
как самый "воздушный".

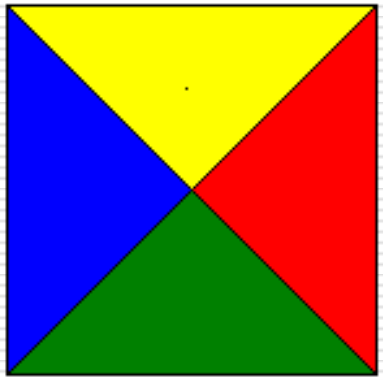
Платоновы тела

Додекаэдр, воплощал в себе "все сущее", символизировал все мироздание, считался главным – его по латыни стали называть

quinta essentia.

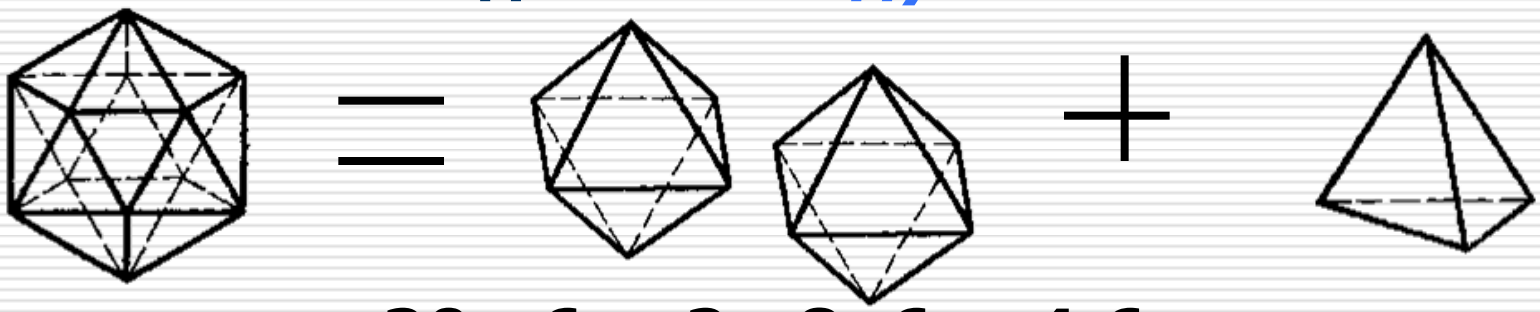
Размышления Платона





«Пусть не знающий математики не входит сюда».

1 вода = *2 воздуха* + 1 огонь.



20 · 6 = 2 · 8· 6 + 4·6,

120 = 96 + 24,

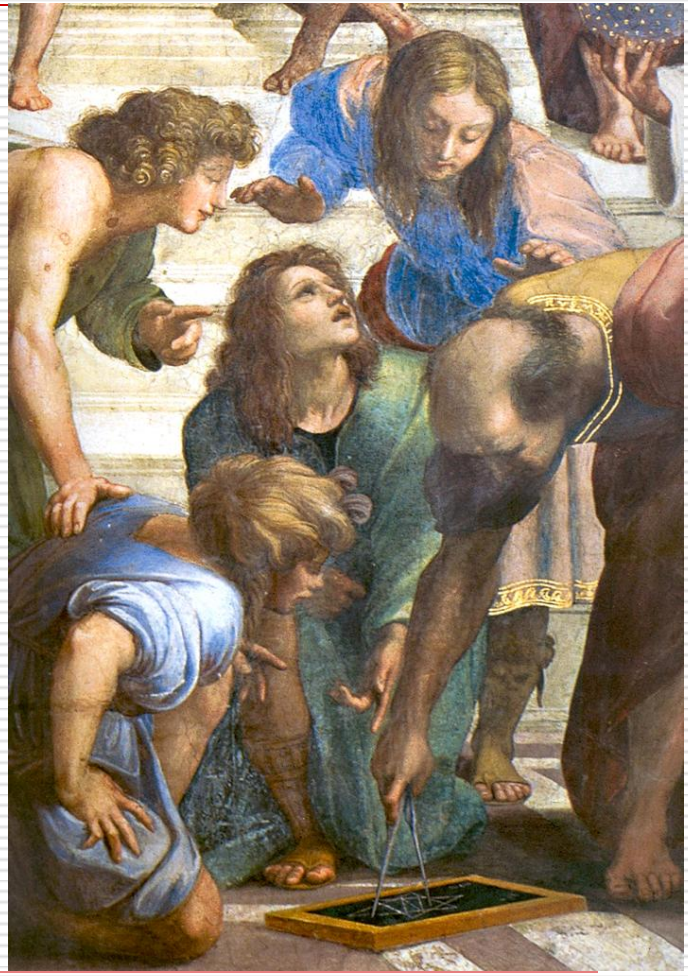
120 = 120.

$$\frac{\text{земля}}{\text{вода}} = \frac{\text{воздух}}{\text{огонь}}$$

Евклид и XIII книга «Начал»

Евклид вовсе не собирался выпускать систематический учебник геометрии. Он задался целью написать сочинение о правильных многогранниках, рассчитанное на начинающих, в силу чего ему пришлось изложить всё необходимое.

Арси Томсон



Тетраэдр и сфера

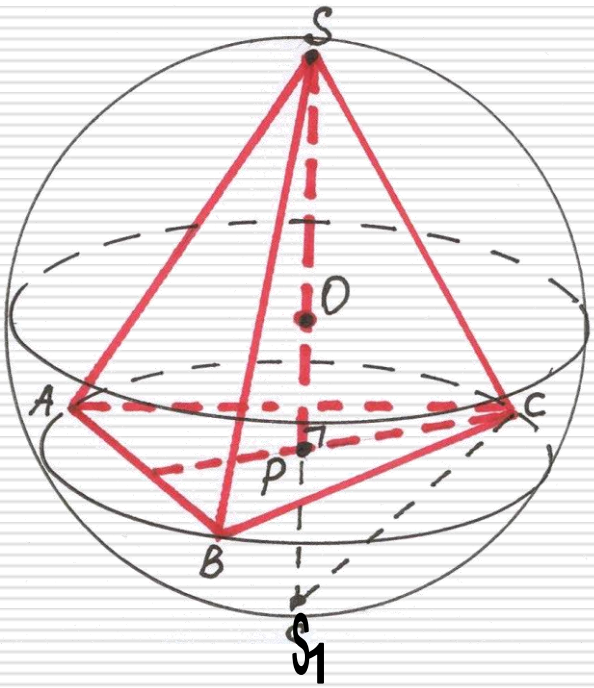
ΔSS_1C, $\angle C = 90°$, $SC = a$,

$PC = \frac{a}{\sqrt{3}}$, $SP = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$SC^2 = SS_1 \cdot SP$, $SS_1 = SC^2 : SP$,

$SS_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{a\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

$$\frac{SS_1}{a} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$



Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{2}$

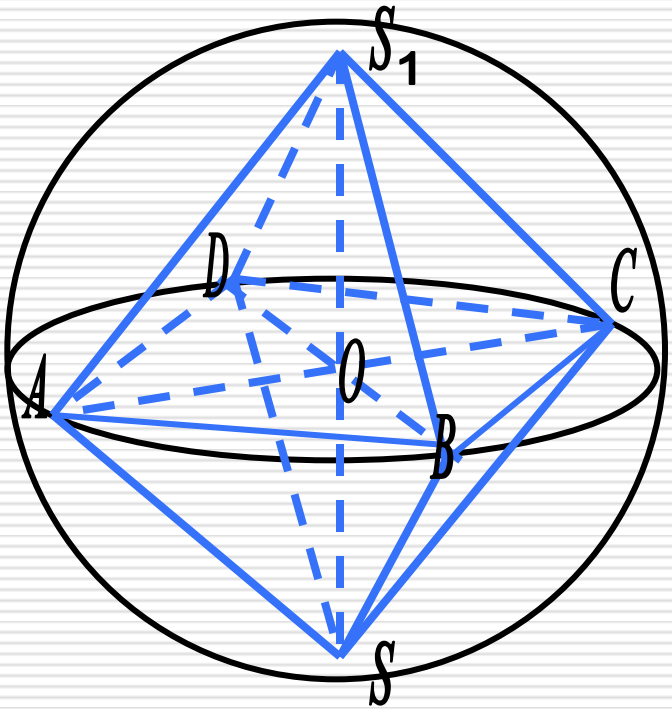
Октаэдр и сфера

***a* – ребро октаэдра**

ΔS_1AS – *равнобедренный, прямоугольный*

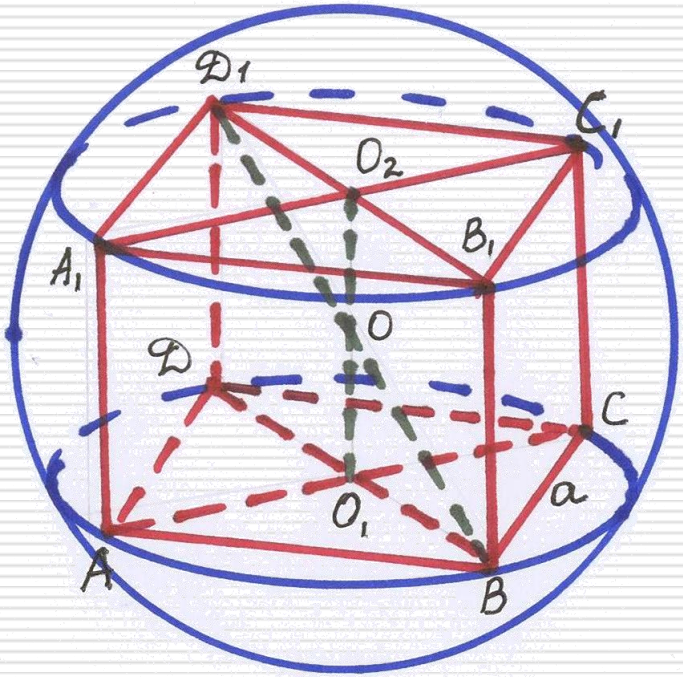
$$SS_1 = a\sqrt{2}$$

$$\frac{SS_1}{a} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$$



Ответ: $\sqrt{2}$

Куб и сфера



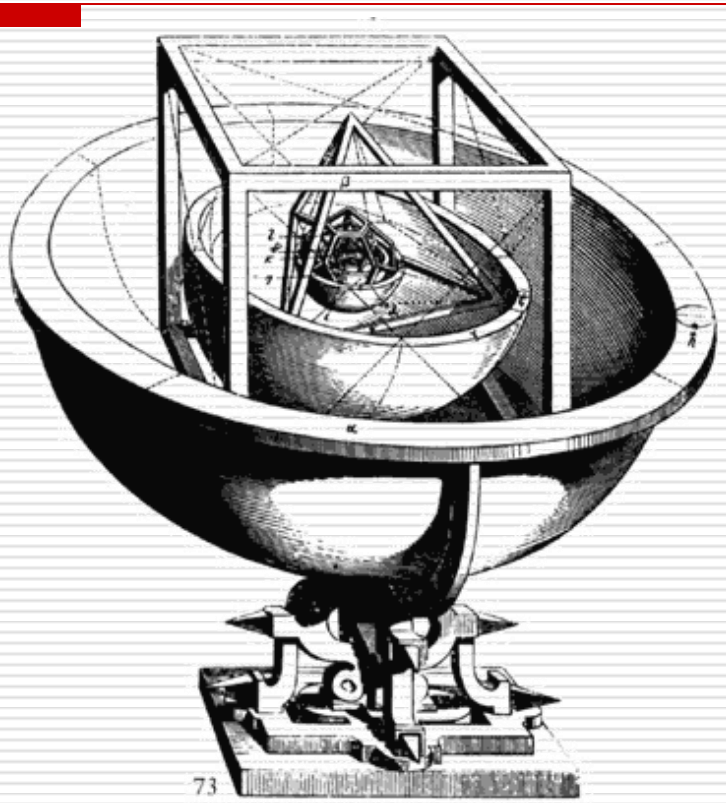
Пусть a – длина ребра куба,
O_1, O_2 – центры оснований куба,
O – центр сферы, $OO_1 = OO_2$.

Диагональ $BD_1 = a\sqrt{3}$ - диаметр сферы

$$\frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$$

Ответ: $\sqrt{3}$

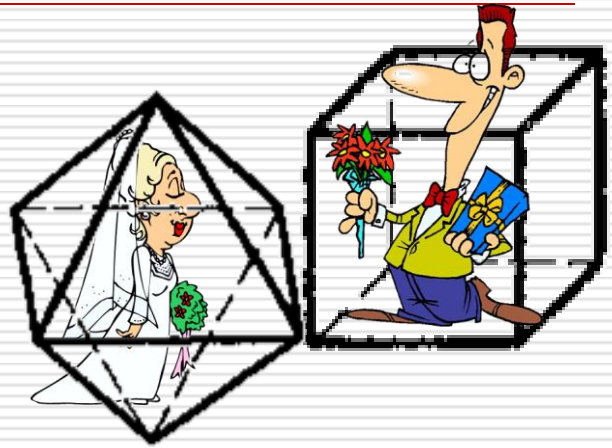
Тайна Вселенной разгадана?



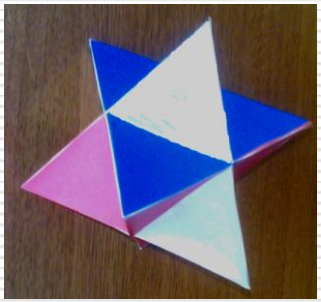
«Космический кубок» Кеплера

Этюд «О снежинке»

«Среди правильных тел самое первое, начало и родитель остальных – куб, а его, если позволительно так сказать, супруга – октаэдр, ибо у октаэдра столько вершин, сколько у куба граней».



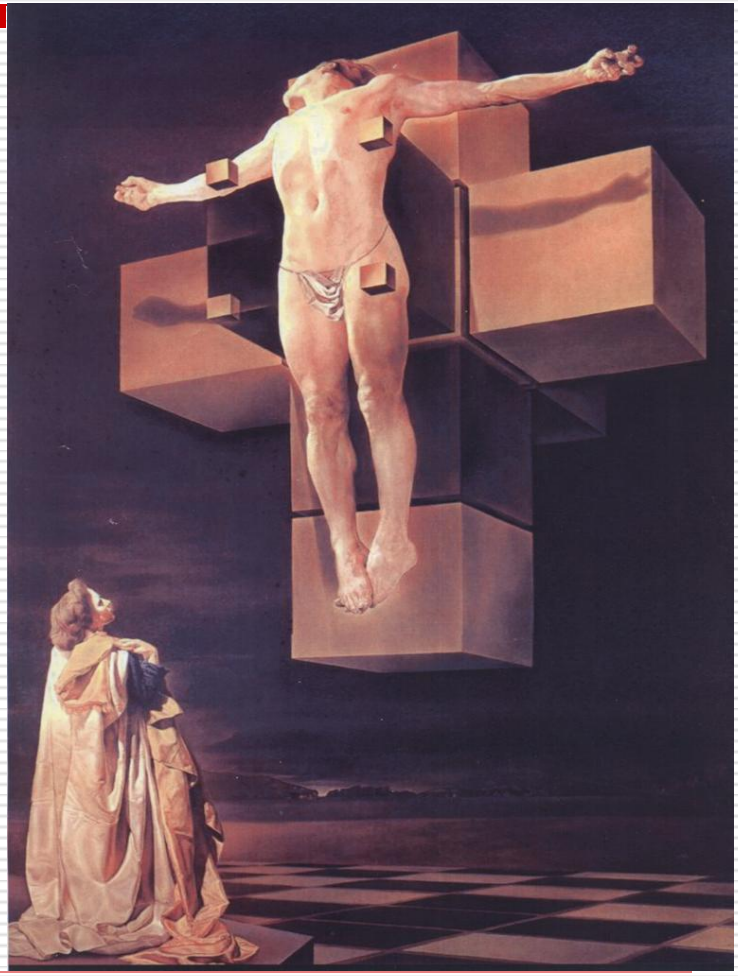
малый звёздчатый додекаэдр



звёздчатый октаэдр

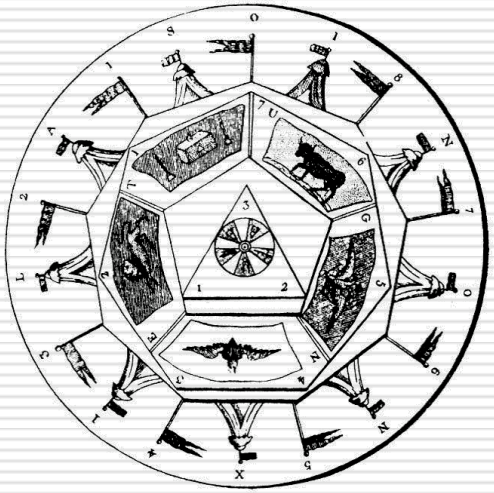
Corpus hypercubus.

Сальвадор Дали

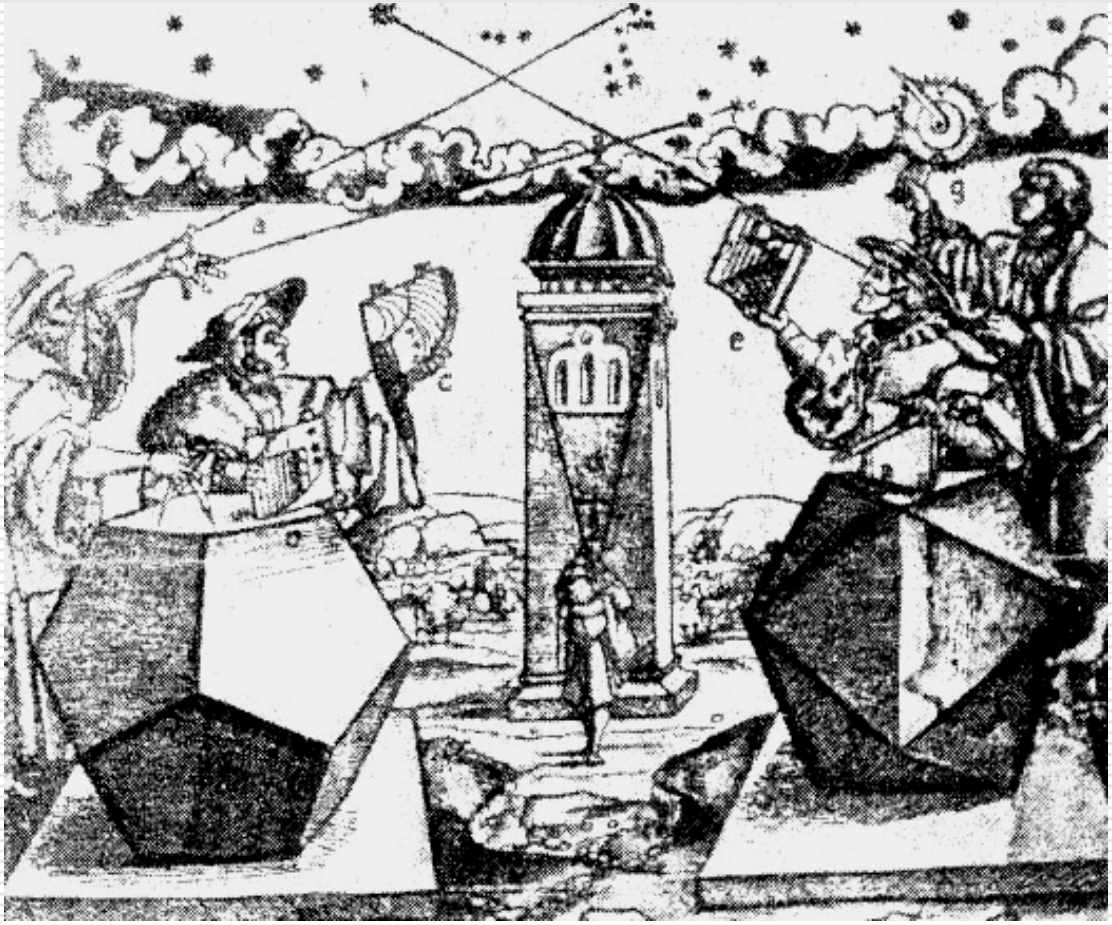


Тайная вечеря, 1955 год.

Астрономические инструменты времён Коперника. Из книги Петра Апиана, 1533 г.

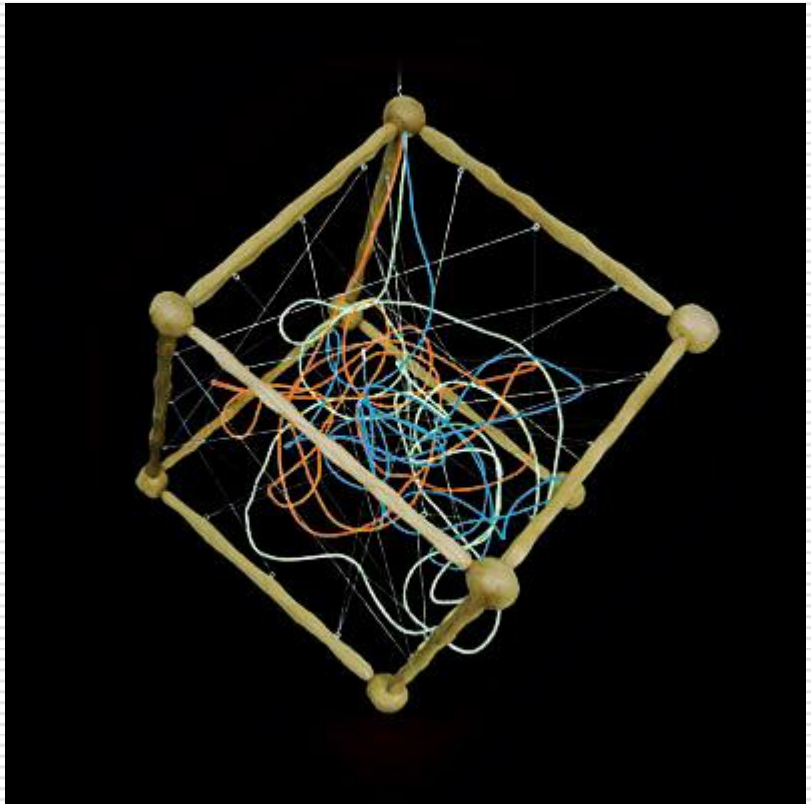


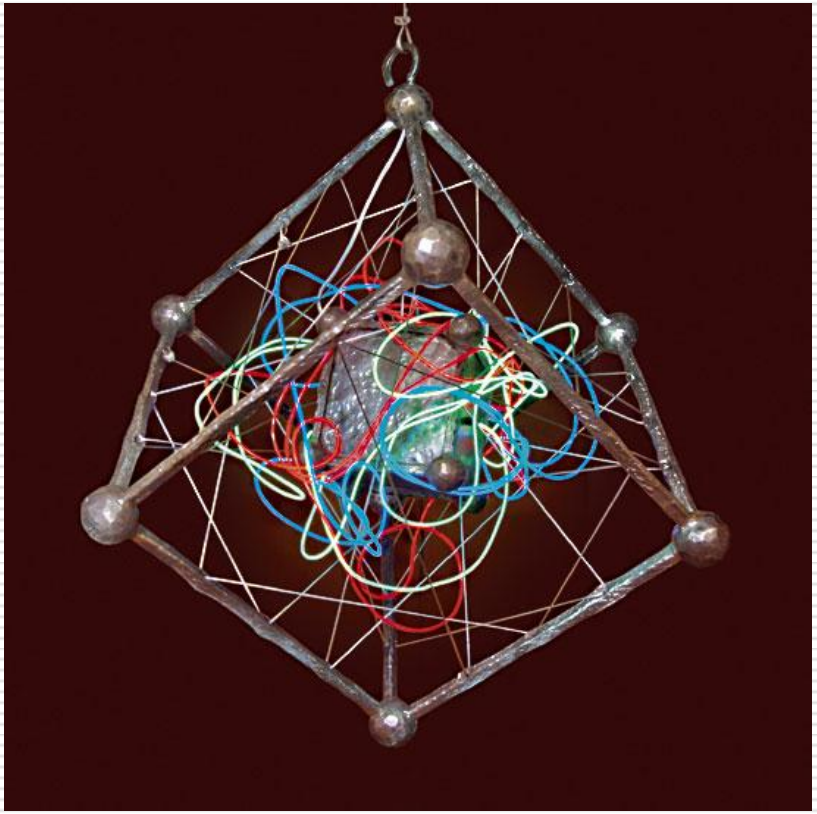
Масонская печать



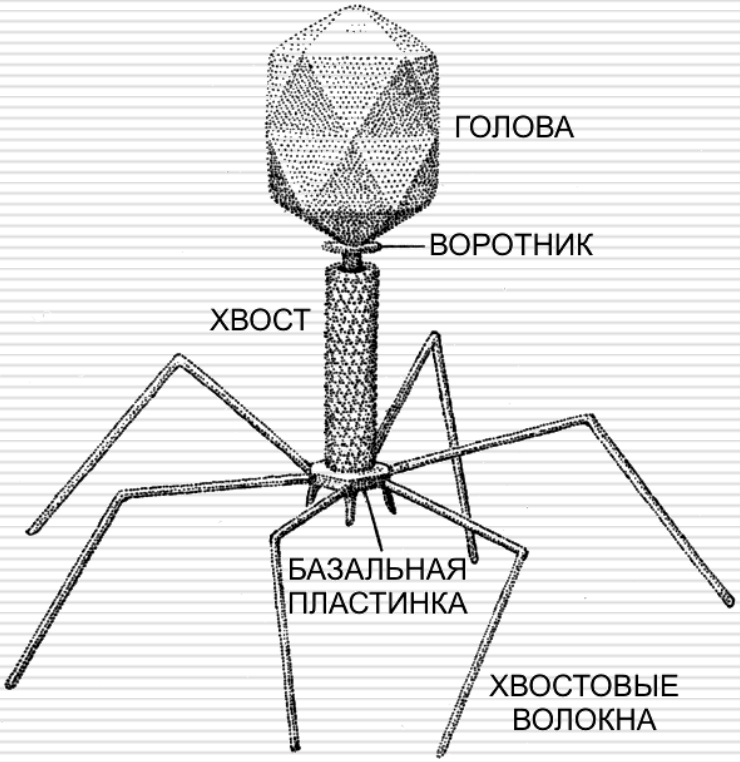
Альбрехт Дюрер «Меланхолия»

Современное искусство

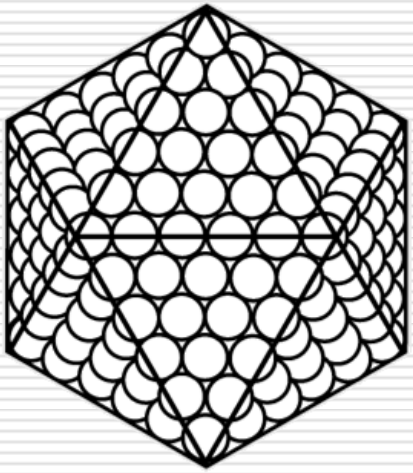




Форма вирусов

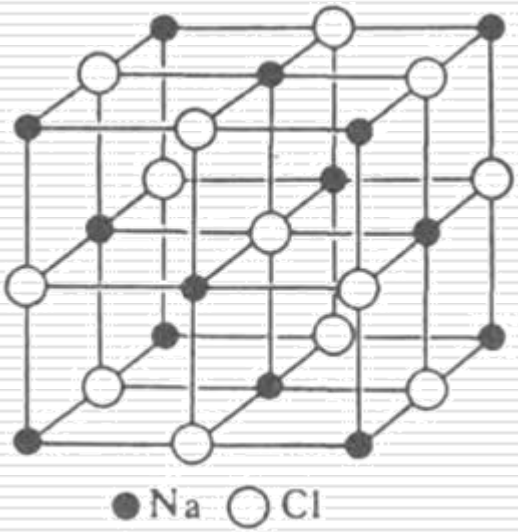


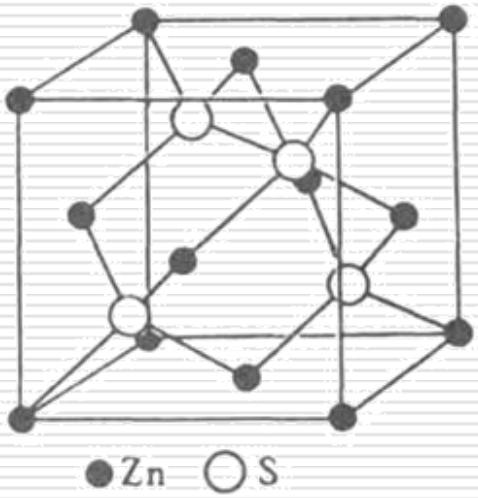
бактериофаг

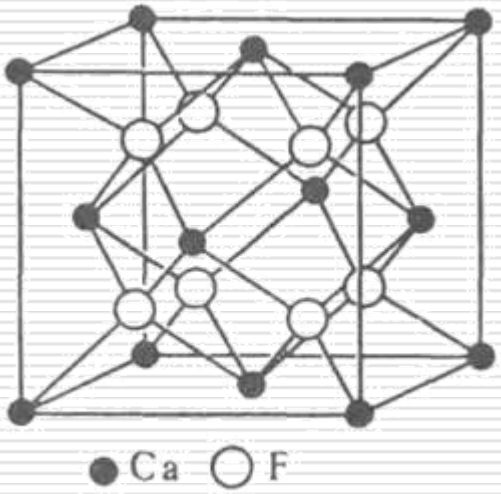


аденовирус

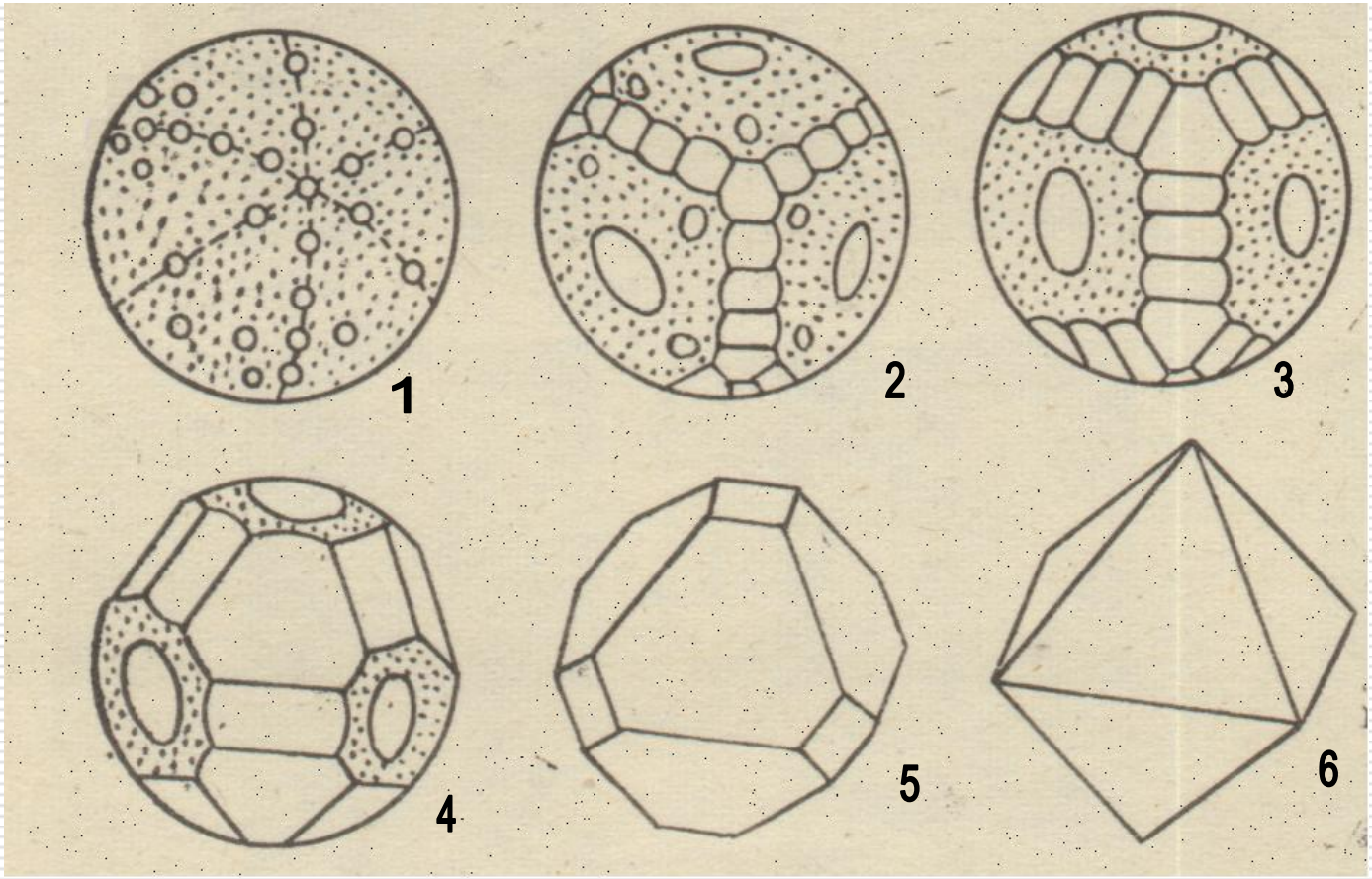
Кристаллы



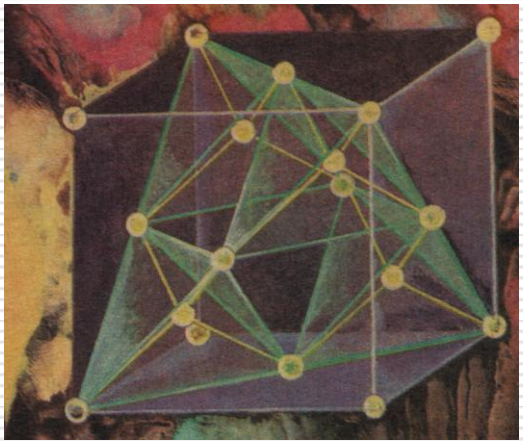


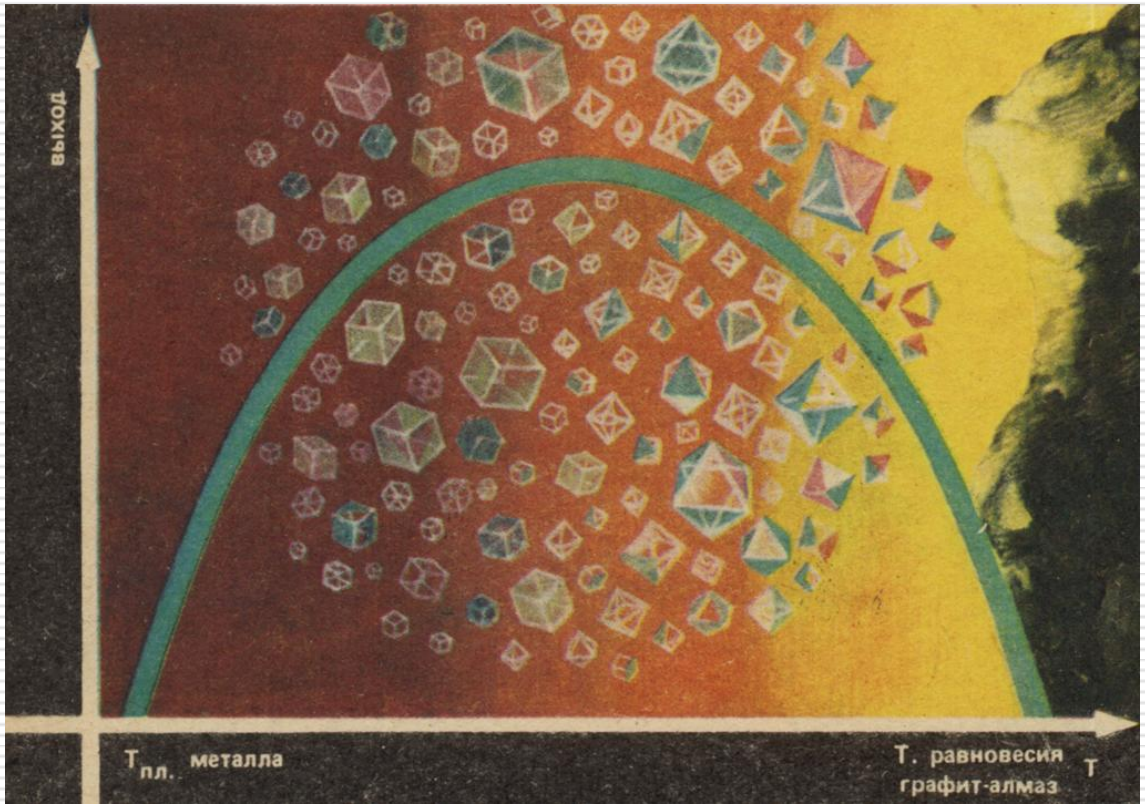


Кристаллы квасцов

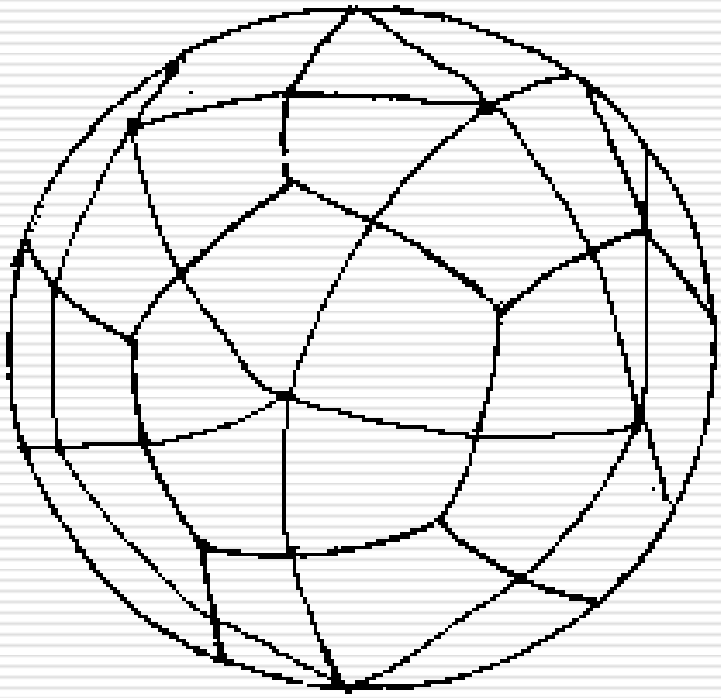


Кристаллы алмаза

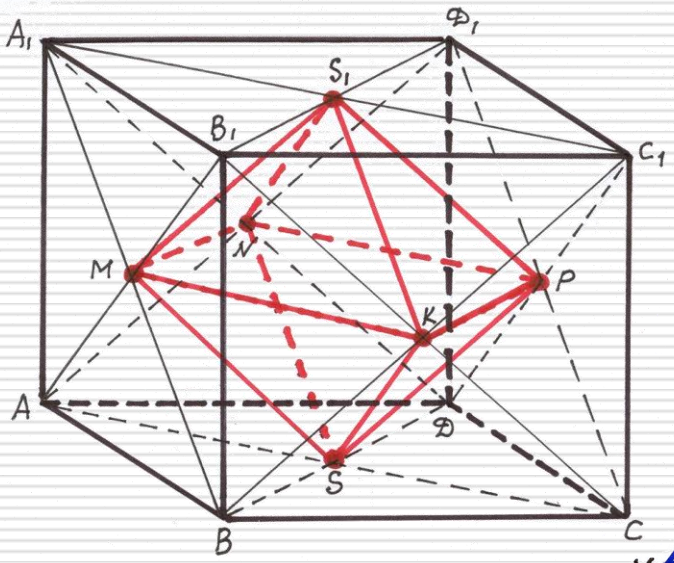


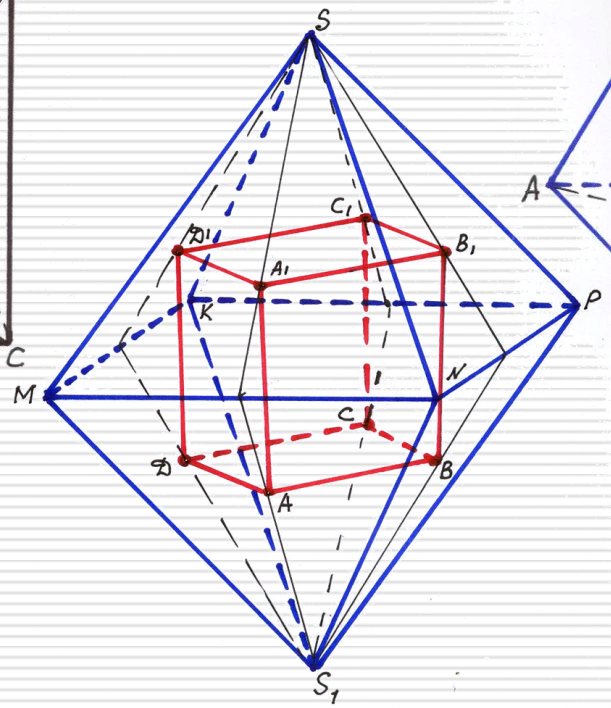


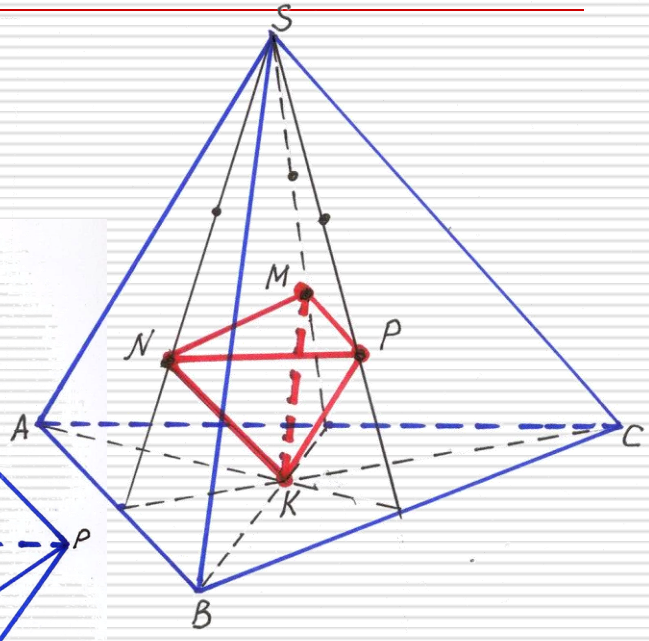
Научная гипотеза В.Макарова и В.Морозова



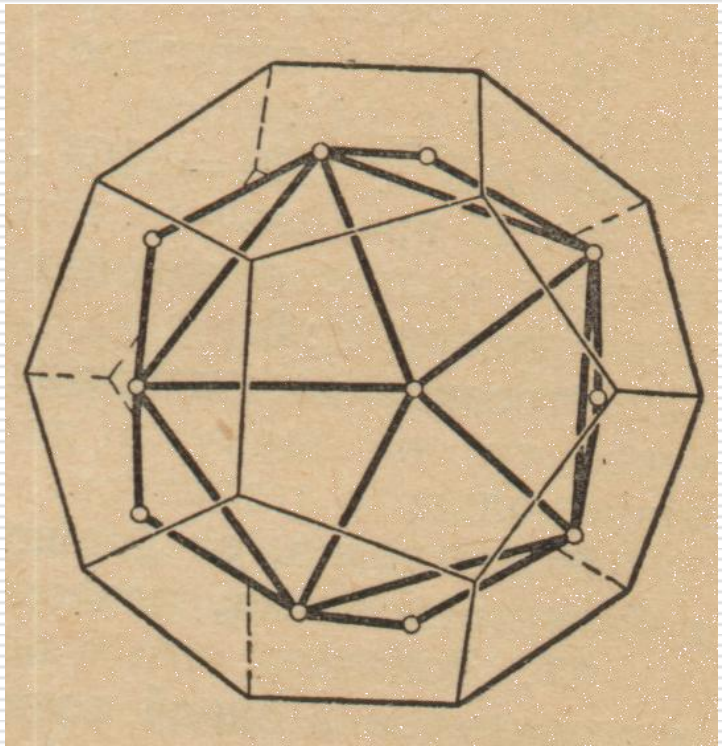
Комбинации правильных многогранников (1)

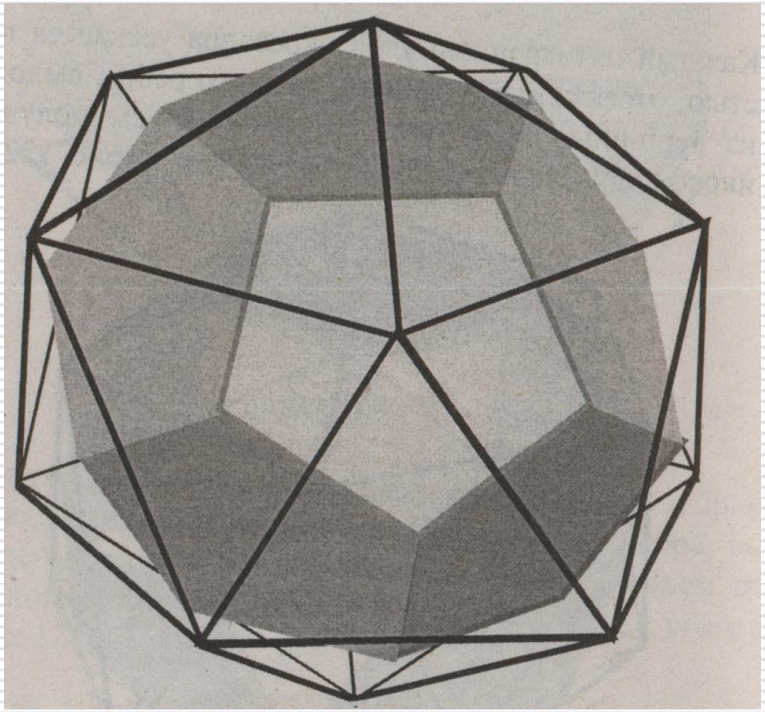




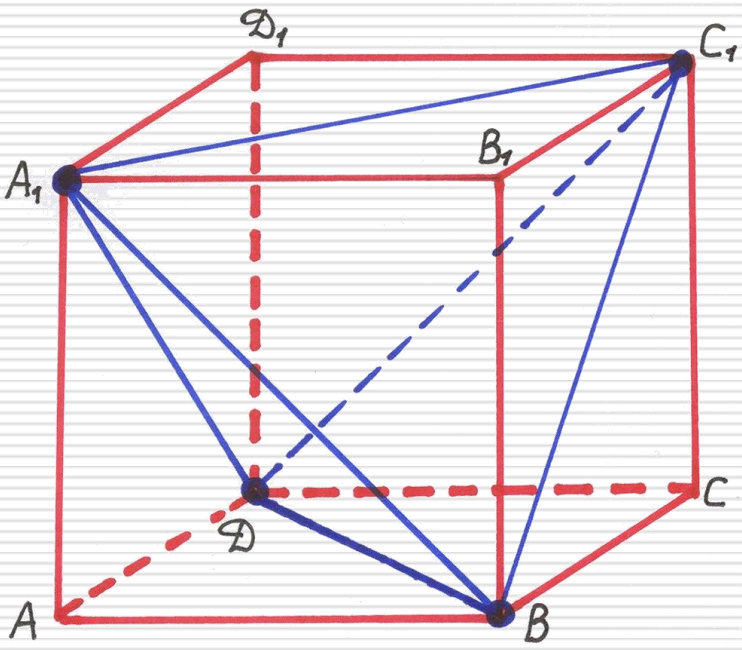


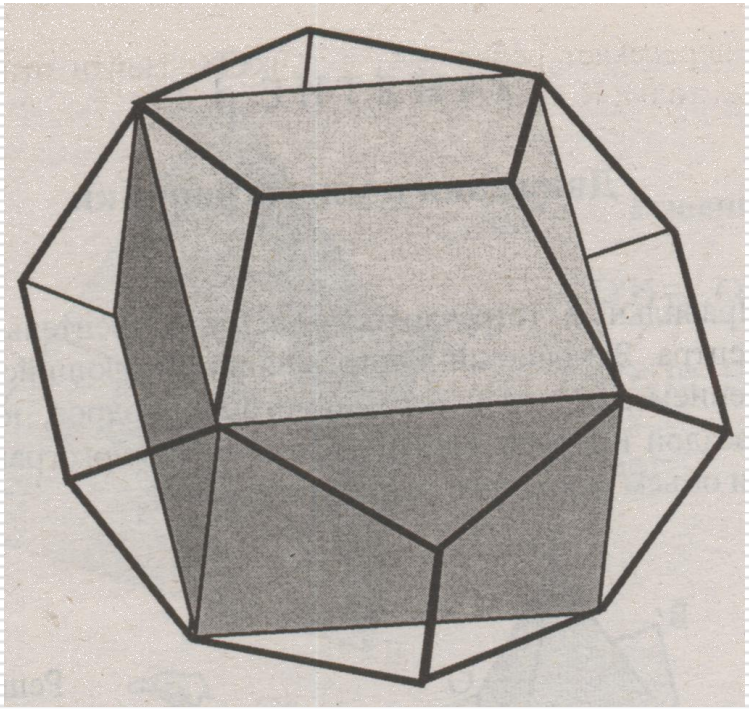
Комбинации правильных многогранников (1)



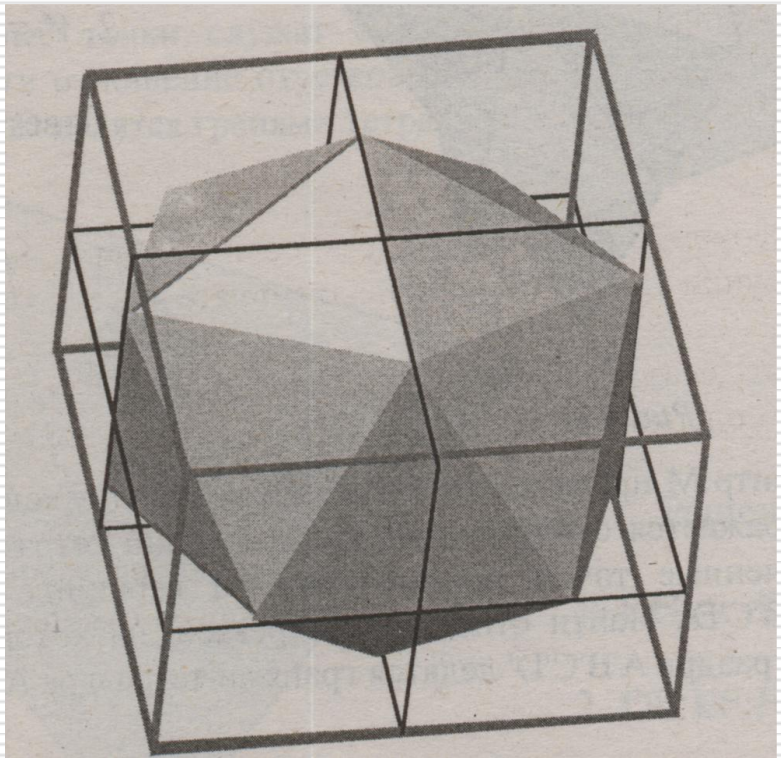


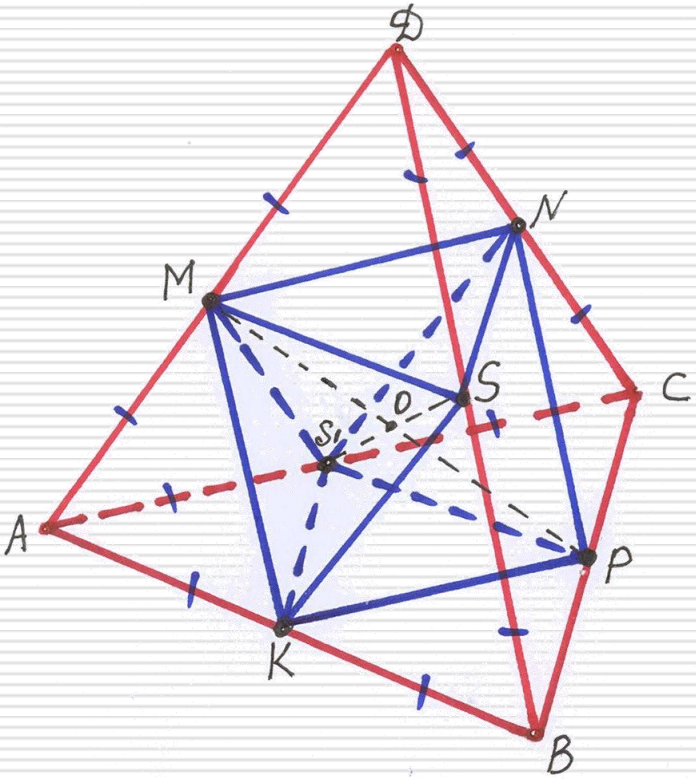
Комбинации правильных многогранников (2)



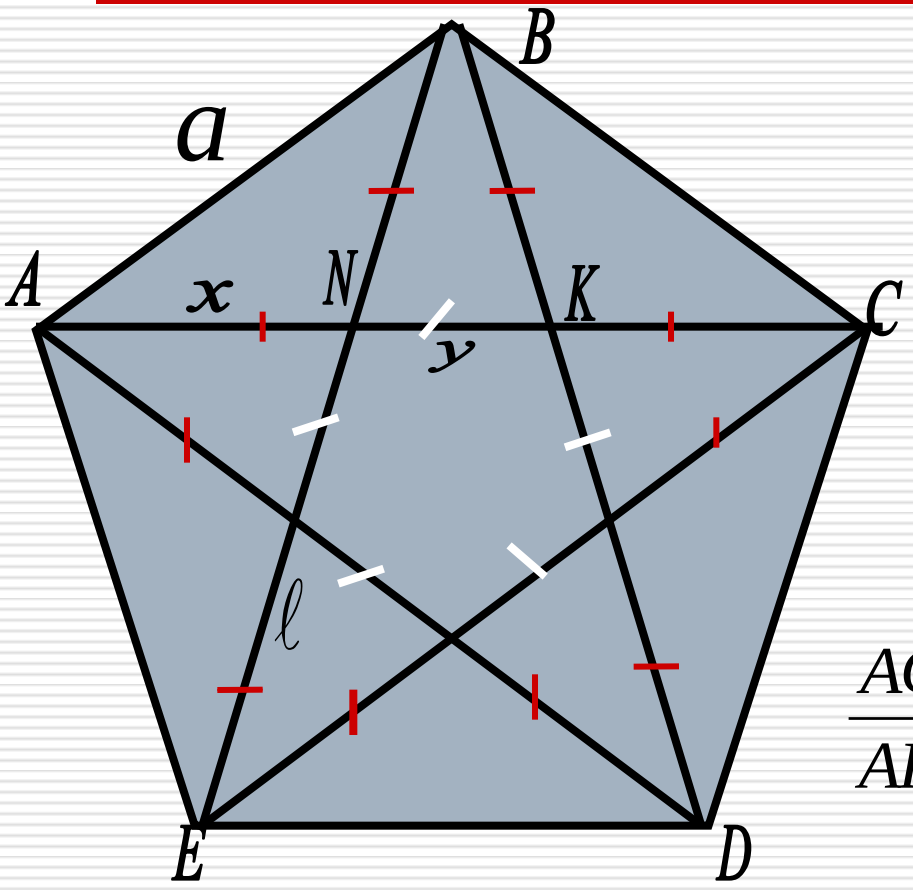


Комбинации правильных многогранников (3)





Правильные многогранники и золотое сечение

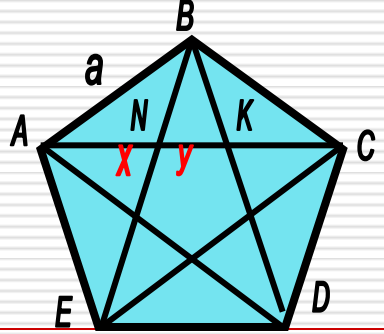


Золотое сечение – деление отрезка на две части, при котором весь отрезок так относится к его большей части, как большая часть к меньшей.

$$\frac{AC}{AK} = \frac{AK}{KC}$$

$$\frac{\ell}{a} = \frac{a}{\ell - a}$$

$$\frac{AK}{AN} = \frac{AN}{NK}$$



ΔABK – равнобедренный (36°, 72°, 72°), $\Rightarrow$, a = x + y,

$$\ell - a = 2x + y - x - y = x$$

$$\Delta ABK \sim \Delta NBK \Rightarrow \frac{AK}{BK} = \frac{BK}{NK}, \Rightarrow \frac{x+y}{x} = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{AK}{AN} = \frac{AN}{NK}$$

$\Rightarrow$ точка N делит отрезок AK в отношении золотого сечения.

$$\Delta ABC \sim \Delta ANB \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{AB}{BN} \Rightarrow \frac{2x+y}{x+y} = \frac{x+y}{x} \Rightarrow \frac{AC}{AK} = \frac{AK}{KC}$$

$\Rightarrow$ точка K делит диагональ AC в отношении золотого сечения

$$2x + y = \ell, \quad x + y = a, \quad x = \ell - a, \Rightarrow \frac{\ell}{a} = \frac{a}{\ell - a}$$

$\tau^2 - \tau - 1 = 0$

$$\tau = \frac{\ell}{a} = \frac{a}{\ell - a} \quad \Rightarrow \quad \ell^2 - \ell a = a^2 \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\ell}{a}\right)^2 - \frac{\ell}{a} - 1 = 0, \quad \tau^2 - \tau - 1 = 0,$$

$$D = 5, \quad \tau > 0, \quad \tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Числа Фибоначчи и золотое сечение

$$\tau^2 = \tau + 1$$

$$\tau^3 = 2\tau + 1$$

$$\tau^4 = 3\tau + 2$$

$$\tau^5 = 5\tau + 3$$

$$\ldots$$

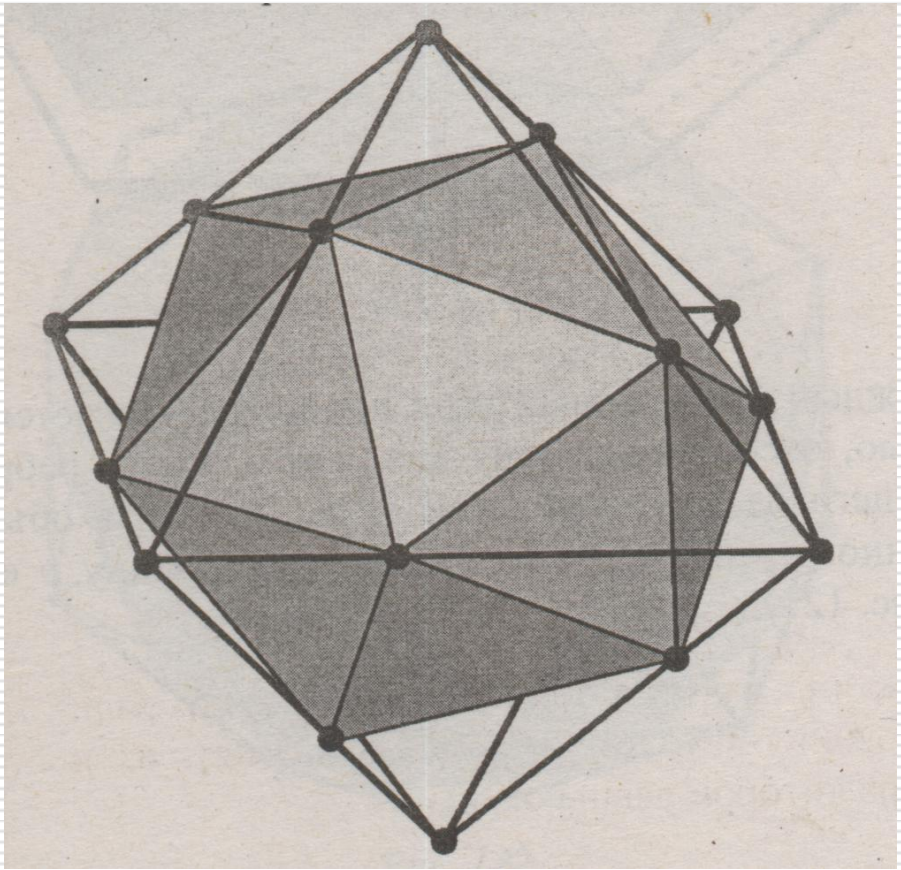
$$\tau^{n+1} = a_n\tau + a_{n-1},$$

где a_n - числа Фибоначчи – 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 …

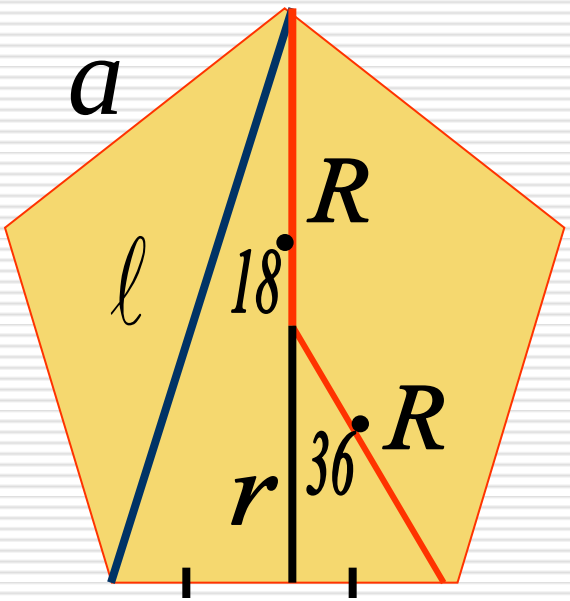
$$\tau^3 = \tau^2 \cdot \tau = (\tau + 1) \cdot \tau = \tau^2 + \tau = \tau + 1 + \tau = 2\tau + 1$$

$$\tau^4 = \tau^3 \cdot \tau = (2\tau + 1)\,\tau = 2\tau^2 + \tau = 2(\tau + 1) + \tau = 3\tau + 2$$

Октаэдр и икосаэдр



Задача №1. **Дан правильный пятиугольник, длина стороны которого *a*. Выразить через число *τ* радиус вписанной окружности; радиус описанной окружности; площадь данного пятиугольника .**



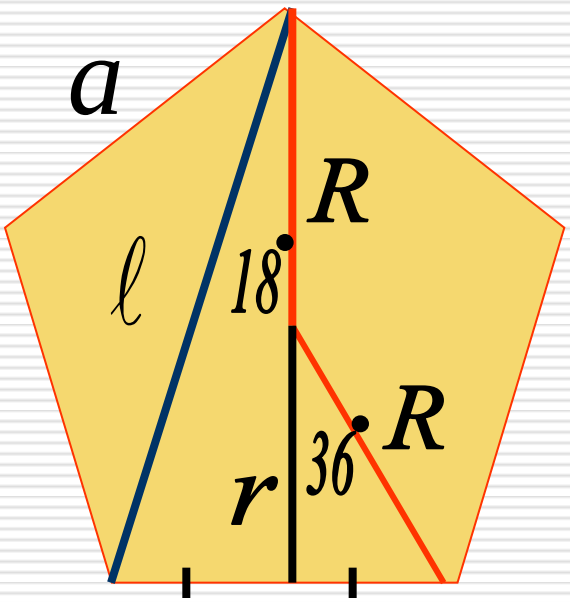
$$\sin 18^0 = \frac{\frac{a}{2}}{\ell} = \frac{a}{2\ell} = \frac{1}{2\cdot\frac{\ell}{a}} = \frac{1}{2\tau}$$

$$\cos 18^0 = \sqrt{1-\frac{1}{4\tau^2}} = \sqrt{\frac{4\tau^2-1}{4\tau^2}} = \frac{\sqrt{(2\tau-1)(2\tau+1)}}{2\tau} =$$

$$= \frac{\sqrt{(2\tau-1)\cdot\tau^3}}{2\tau} = \frac{\tau\sqrt{\tau\cdot(2\tau-1)}}{2\tau} =$$

$$= \frac{\sqrt{2\tau^2-\tau}}{2} = \frac{\sqrt{2(\tau+1)-\tau}}{2} = \frac{\sqrt{\tau+2}}{2}$$

$$\cos 36^0 = 2\cos^2 18^0 - 1 = \frac{\tau + 2}{2} - 1 = \frac{\tau}{2}$$

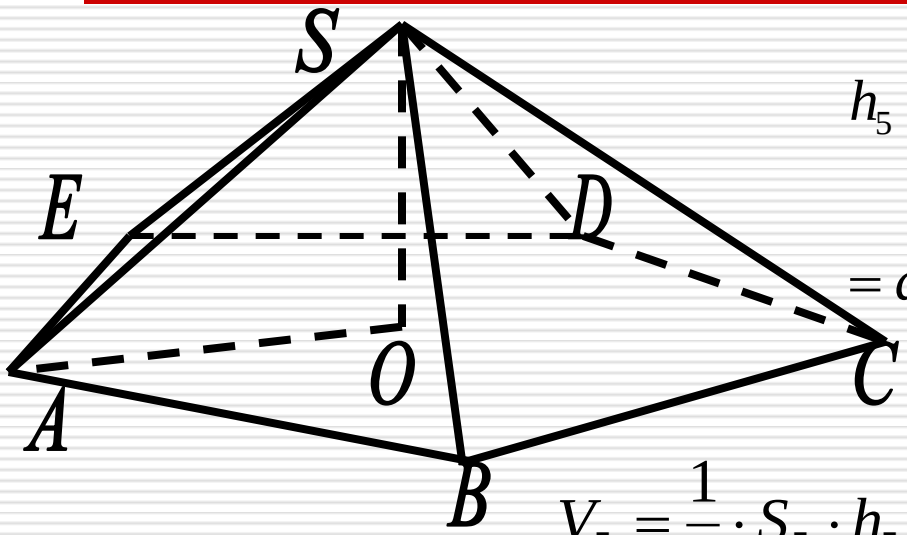


$$R_5 = \frac{a}{2\sin 36^0} = \frac{a\tau}{\sqrt{\tau + 2}}$$

$$r_5 = R_5 \cdot \cos 36^0 = \frac{a\tau}{\sqrt{\tau + 2}} \cdot \frac{\tau}{2} = \frac{a\tau^2}{2\sqrt{\tau + 2}}$$

$$S_5 = 5 \cdot \frac{1}{2} a \cdot r = \frac{5}{2} \cdot a \cdot \frac{a\tau^3}{2\sqrt{\tau + 2}} = \frac{5a^2\tau^2}{4\sqrt{\tau + 2}}$$

Задача №2. **Выразить через τ длину высоты и объём правильной пятиугольной пирамиды, боковые рёбра и стороны основания которой равны a.**



$$h_5 = SO = \sqrt{a^2 - R_5^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2\tau^2}{\tau+2}} =$$

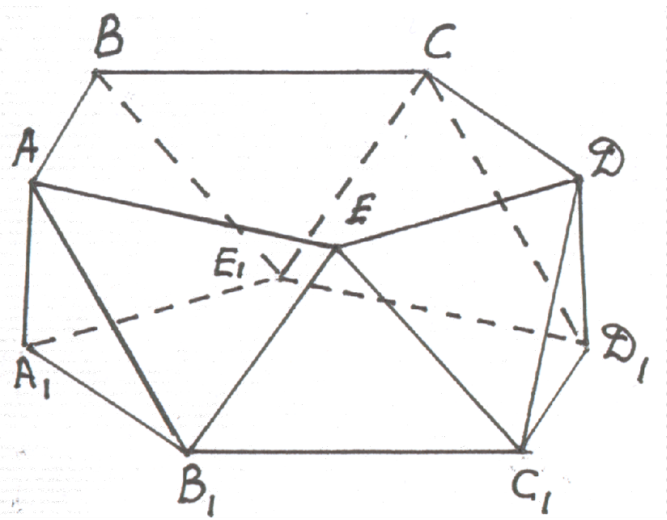
$$= a\sqrt{\frac{\tau+2-\tau^2}{\tau+2}} = a\sqrt{\frac{\tau+2-\tau-1}{\tau+2}} = \frac{a}{\sqrt{\tau+2}}$$

$$V_5 = \frac{1}{3}\cdot S_5 \cdot h_5 = \frac{1}{3}\cdot\frac{5a^2\tau^2}{4\sqrt{\tau+2}}\cdot\frac{a}{\sqrt{\tau+2}} = \frac{5a^3\tau^2}{12(\tau+2)}$$

$$5\tau^2 = \tau^2 + 4\tau^2 = \tau^2 + 4(\tau+1) = \tau^2 + 4\tau + 4 = (\tau+2)^2$$

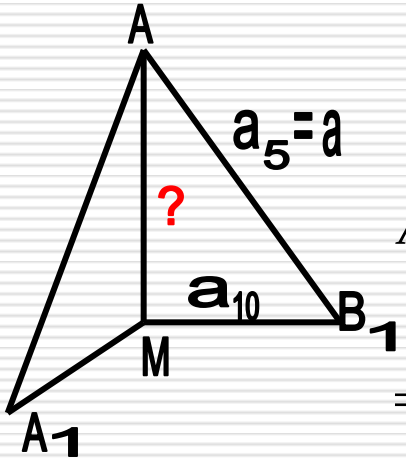
$$V_5 = \frac{a^3(\tau+2)^2}{12(\tau+2)} = \frac{1}{12}a^3(\tau+2)$$

Задача №3. **Выразить через τ длину высоты и объём антипризмы, основания которой – правильные пятиугольники и все рёбра равны *a*.**



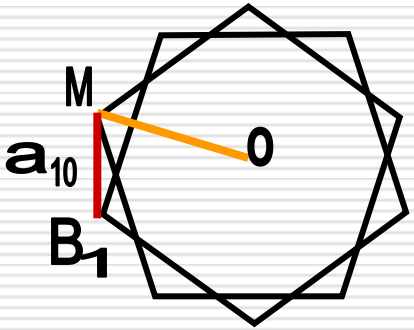
$$MB_1 = a_{10} = 2R_5 \cdot \sin 18^\circ =$$

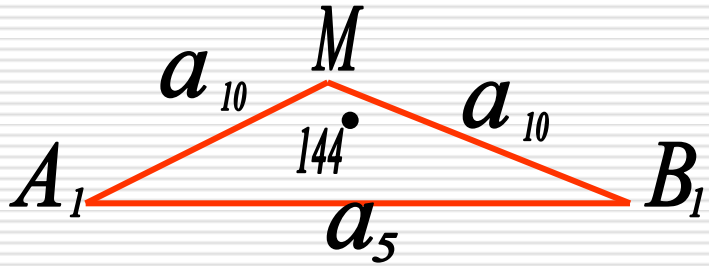
$$= 2 \cdot \frac{a\tau}{\sqrt{\tau+2}} \cdot \frac{1}{2\tau} = \frac{a}{\sqrt{\tau+2}}$$



$$AM = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{\tau+2}} = \sqrt{\frac{a^2(\tau+1)}{\tau+2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{a^2\tau^2}{\tau+2}} = \frac{a\tau}{\sqrt{\tau+2}}$$





$$S_{10} = 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot R_5^2 \cdot \sin 36° = 5 \cdot \frac{a^2\tau^2}{\tau+2} \cdot \frac{\sqrt{\tau+2}}{2\tau} = \frac{5a^2\tau}{2\sqrt{\tau+2}}$$

$$V_{10} = S_{10} \cdot AM = \frac{5a^2\tau}{2\sqrt{\tau+2}} \cdot \frac{a\tau}{\sqrt{\tau+2}} = \frac{5a^3\tau^2}{2(\tau+2)} = \frac{a^3(\tau+2)^2}{2(\tau+2)} = \frac{1}{2}a^3(\tau+2)$$

$$S_3 = \frac{1}{2}a_{10}^2 \cdot \sin 144° = \frac{1}{2}a_{10}^2 \cdot \sin 36° = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{\tau+2} \cdot \frac{\sqrt{\tau+2}}{2\tau} = \frac{a^2}{4\tau\sqrt{\tau+2}}$$

$$V_3 = \frac{1}{3} \cdot S_3 \cdot AM = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{4\tau\sqrt{\tau+2}} \cdot \frac{a\tau}{\sqrt{\tau+2}} = \frac{1}{12} \cdot \frac{a^3}{\tau+2}$$

$$15\tau^2 - 5 = 15(\tau + 1) - 5 = 15\tau + 10 = 5(3\tau + 2) =$$
$$= 5\tau^4 = 5\tau^2 \cdot \tau^2 = (\tau + 2)^2 \cdot \tau^2$$

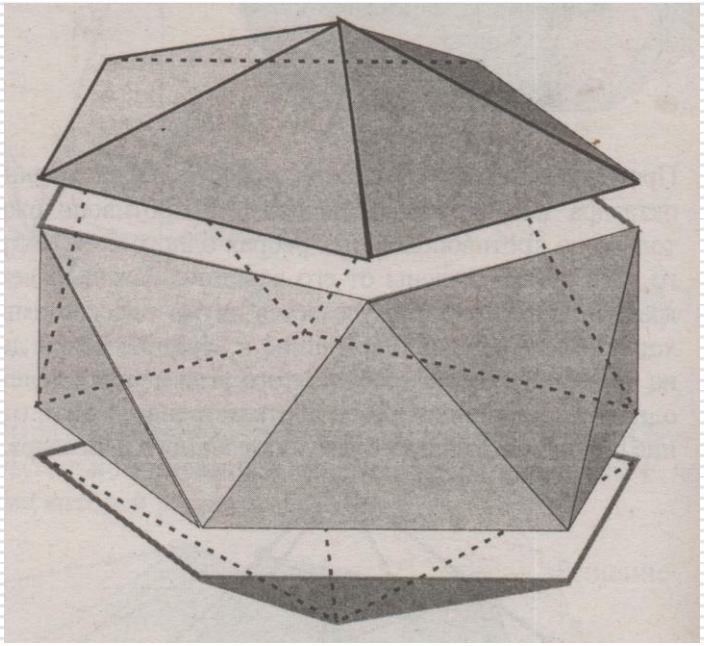
$$V_{антипризмы} = V_{10} - 10 \cdot V_3 = \frac{1}{2} a^3 (\tau + 2) - \frac{5}{6} a^3 \cdot \frac{1}{\tau + 2} =$$

$$= \frac{1}{6} a^3 \cdot \left(3(\tau + 2) - \frac{5}{\tau + 2} \right) = \frac{1}{6} a^3 \cdot \left(\frac{3(\tau + 2)^2 - 5}{\tau + 2} \right) =$$

$$= \frac{1}{6} a^3 \left(\frac{3 \cdot 5\tau^2 - 5}{\tau + 2} \right)$$

$$V_{антипризмы} = \frac{1}{6} a^3 \tau^2 (\tau + 2)$$

Объём икосаэдра



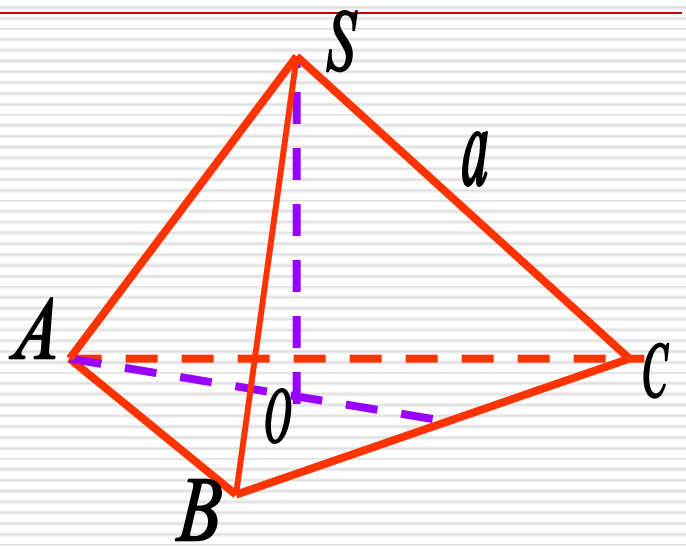
$$V = V_{\text{атипризмы}} + 2V_5$$

$$V = \frac{1}{6}a^3\tau^2(\tau+2) + 2\cdot\frac{1}{12}a^3(\tau+2) =$$

$$= \frac{1}{6}a^3(\tau+2)(\tau^2+1)$$

$$V = \frac{1}{6}a^3(\tau+2)\cdot(\tau+1+1) = \frac{1}{6}a^3(\tau+2)^2 = \frac{5}{6}a^3\tau^2$$

Объём тетраэдра



$SO \perp (ABC)$, $\quad S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

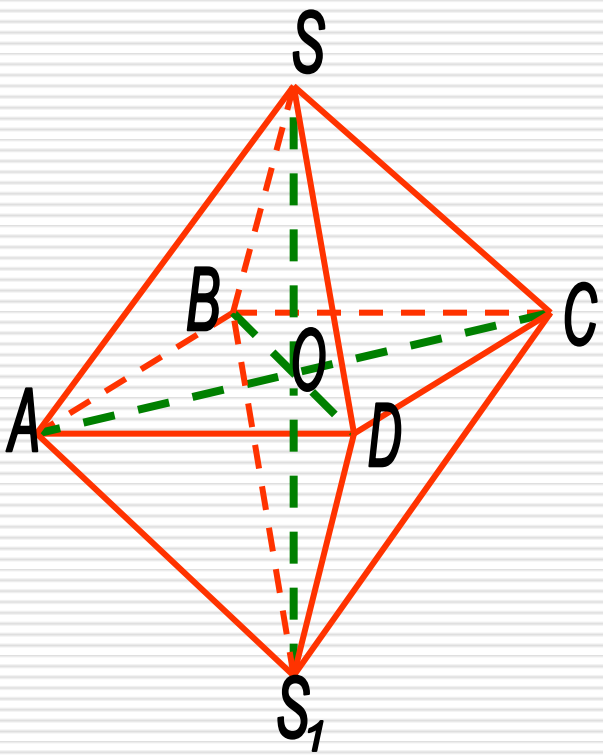
$\Delta SAO, \quad \angle O = 90°, \quad AS = a,$

$AO = \dfrac{a}{\sqrt{3}}, \quad SO = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{3}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

Ответ: $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$

Объём октаэдра



$$S_{ABCD} = a^2, \; SS_1 = a\sqrt{2}$$

$$V = 2V_{SABCD} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SO =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SS_1 = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot a\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$$

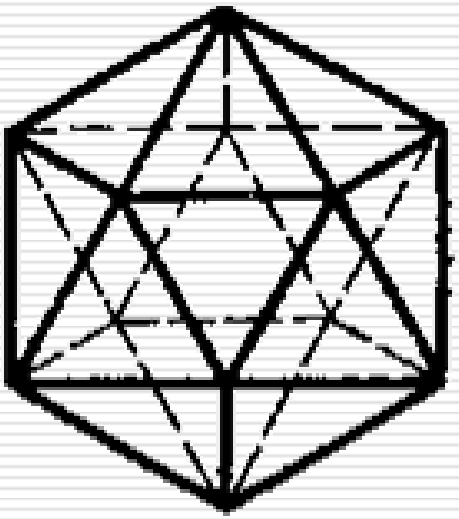
Ответ: $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$

Объём икосаэдра

$$V = \frac{5}{6} a^3 \tau^2, \quad \tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

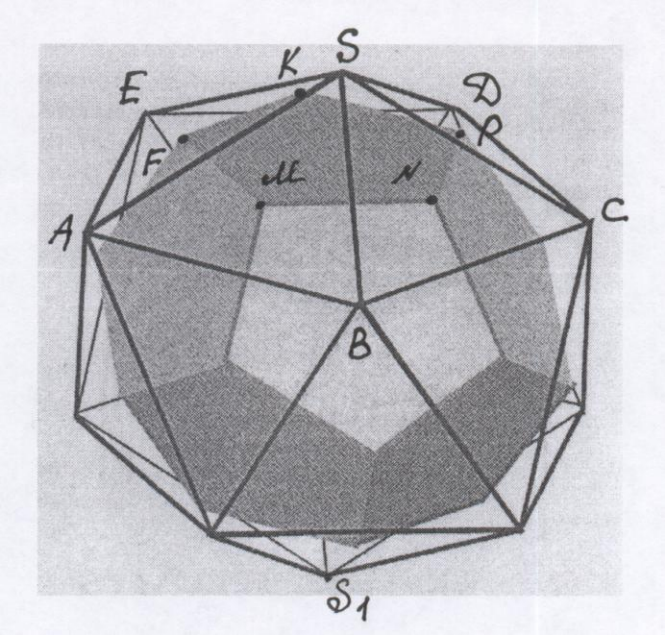
$$\tau^2 = \tau + 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

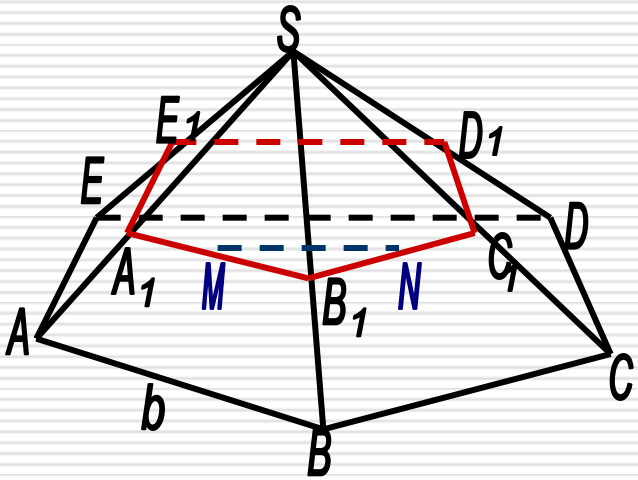
$$V = \frac{5}{12} a^3 (3+\sqrt{5})$$



Ответ: $V = \frac{5}{12} a^3 (3+\sqrt{5})$

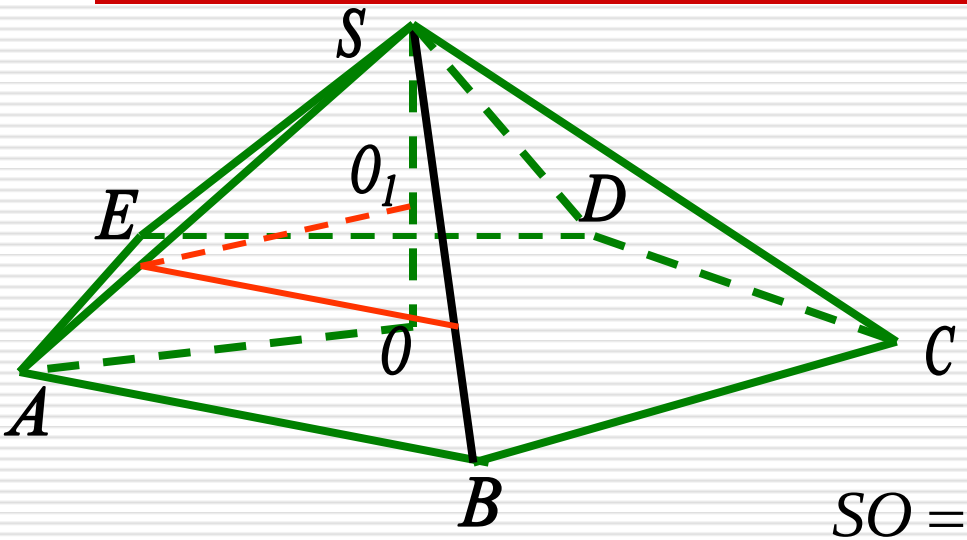
Объём додекаэдра





$$MN = \frac{1}{2} A_1C_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} AC = \frac{1}{3} b\tau = a, \Rightarrow b = \frac{3a}{\tau}$$

Объём додекаэдра



$$SO = \frac{b}{\sqrt{\tau + 2}}, \quad SO_1 = \frac{2}{3} SO,$$

$$S_{MNPKF} = \frac{5a^2\tau^2}{4\sqrt{\tau + 2}}$$

Объём додекаэдра

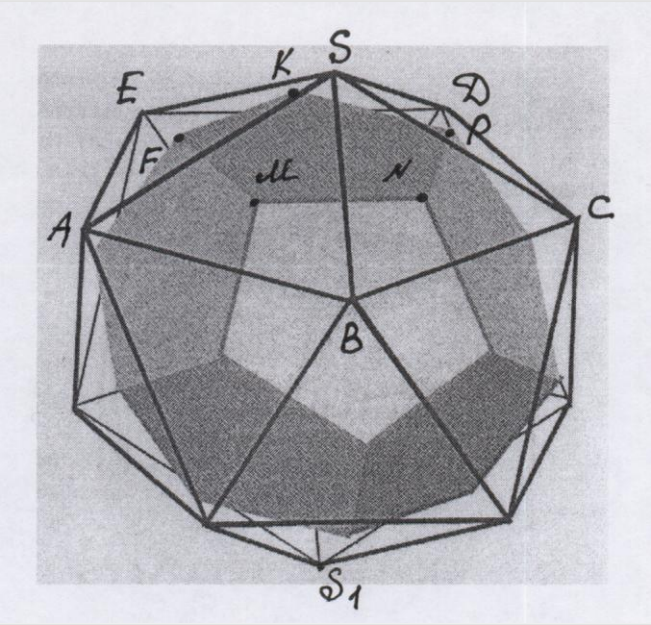
$$2x = SS_1 - 2SO_1 = 2SO + h_a - 2\cdot\frac{2}{3}SO =$$

$$\left|h_a - \text{высота} \quad \text{антипризмы}\right| =$$

$$= \frac{2}{3}SO + h_a = \frac{2b}{3\sqrt{\tau+2}} + \frac{b\tau}{\sqrt{\tau+2}} =$$

$$\frac{b(2+3\tau)}{3\sqrt{\tau+2}} = \frac{b\tau^4}{3\sqrt{\tau+2}} =$$

$$= \frac{3a\tau^3}{3\sqrt{\tau+2}} = \frac{a\tau^3}{\sqrt{\tau+2}}$$



Объём додекаэдра

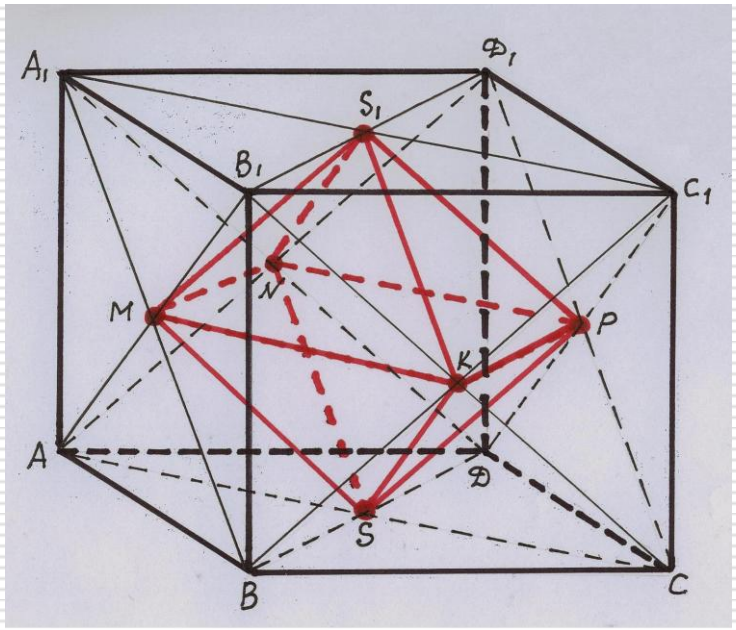
$$x = \frac{a\tau^3}{2\sqrt{\tau+2}}$$

$$V_{додекаэдра} = 12 \cdot \frac{1}{3} S_{MNPKF} \cdot x = 4 \cdot \frac{5a^2\tau^2}{4\sqrt{\tau+2}} \cdot \frac{a\tau^3}{2\sqrt{\tau+2}} = \frac{5\tau^2 a^3 \tau^3}{2(\tau+2)} =$$

$$= \frac{(\tau+2)^2 a^3 \tau^3}{2(\tau+2)} = \frac{1}{2} a^3 \tau^3 (\tau+2)$$

$$V = \frac{a^3}{4}(15 + 7\sqrt{5})$$

Задача №1. В куб вписан октаэдр так, что вершины октаэдра являются центрами граней куба. Найти отношение объёма октаэдра к объёму куба.



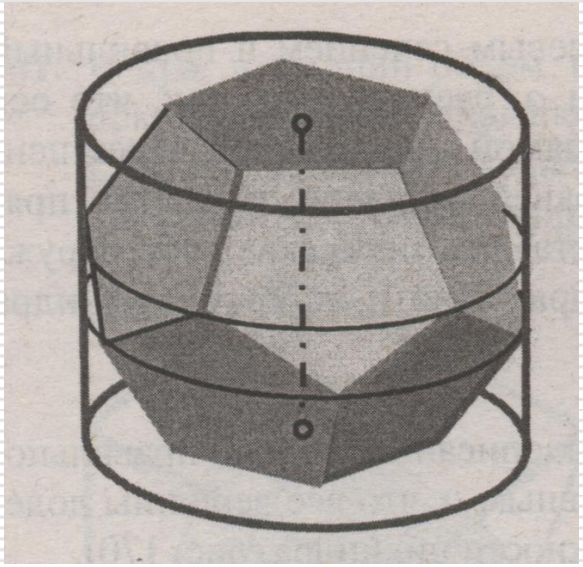
Пусть *a* – ребро куба, *b* – ребро октаэдра.

$V_{куба} = a^3$, $V_{октаэдра} = \frac{b^3\sqrt{2}}{3}$

$$b = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{V_{октаэдра}}{V_{куба}} = \frac{\frac{a^2 2\sqrt{2}}{8} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3}}{a^3} = \frac{1}{6}$$

Задача №2. Найти радиус цилиндра, так описанного около правильного додекаэдра с ребром, равным a, что все вершины додекаэдра принадлежат поверхности цилиндра.

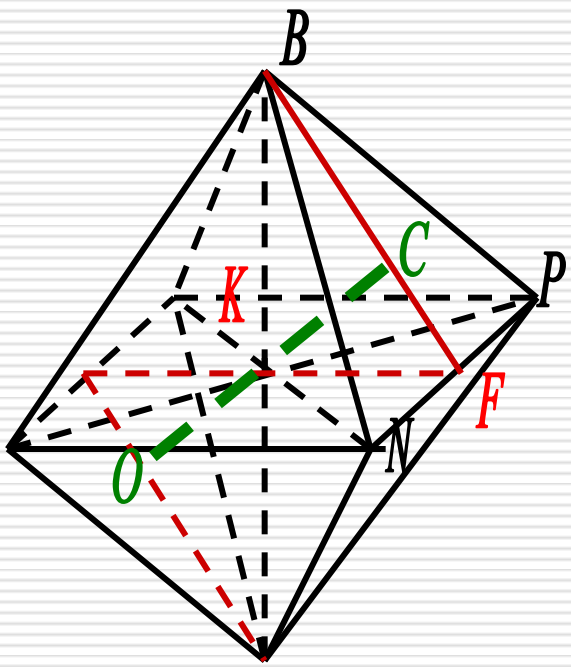


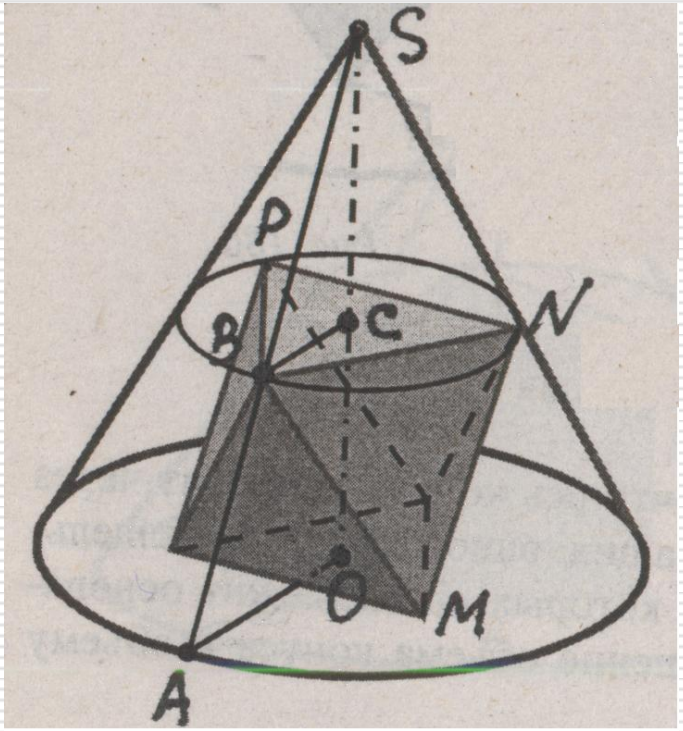
$$\ell = 2R \cdot \sin 36^\circ, \Rightarrow, R = \frac{\ell}{2\sin 36^\circ} =$$

$$= \frac{a\tau \cdot 2\tau}{2\sqrt{\tau + 2}} = \frac{a\tau^2}{\sqrt{\tau + 2}}$$

Ответ: $R = \dfrac{a\tau^2}{\sqrt{\tau + 2}}$

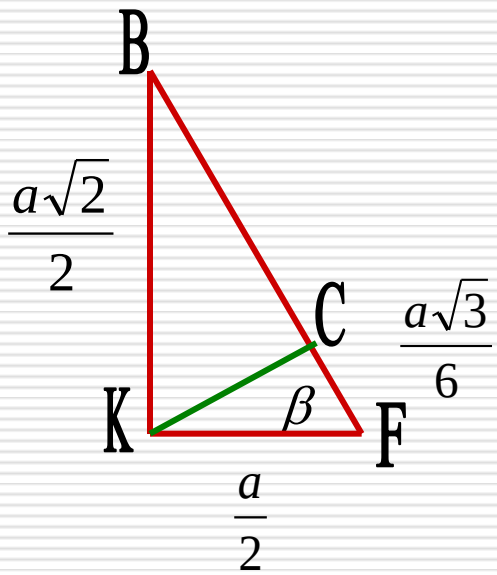
Задача №3. Радиус основания конуса равен **R**, а образующие наклонены к плоскости основания под углом **α**. Найти длину ребра правильного октаэдра, так вписанного в конус, что ось конуса проходит через центры двух параллельных граней октаэдра, одна из которых принадлежит основанию конуса.





1) BC : CF = 2 : 1, OC = 2 KC.

2. ΔBKF: $KF = \frac{a}{2}, \quad BF = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\beta = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$



3. ΔKCF:

$$KC^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{36} - 2\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a^2}{6},$$

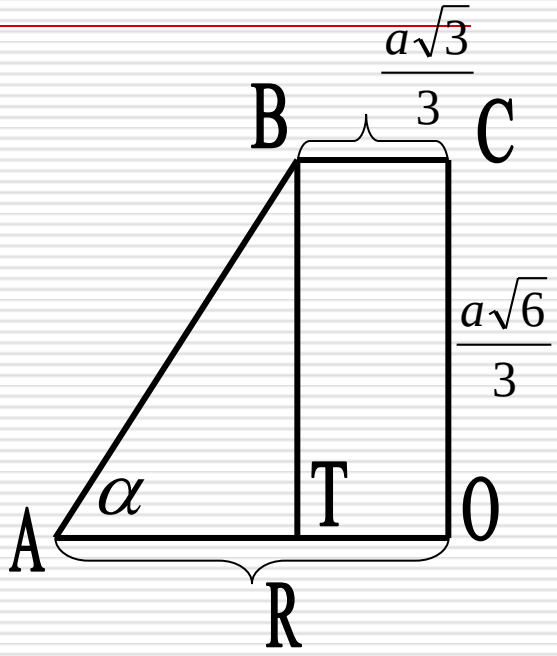
$$KC = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

$$CO = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

4. ΔABT: $tg\alpha = \dfrac{a\sqrt{6}}{3(R - \frac{a\sqrt{3}}{3})} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3R - a\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{R\sqrt{3} - a}$

$$a(\sqrt{2} + tg\alpha) = R\sqrt{3}tg\alpha$$

$$a = \frac{R\sqrt{3}tg\alpha}{\sqrt{2} + tg\alpha}$$



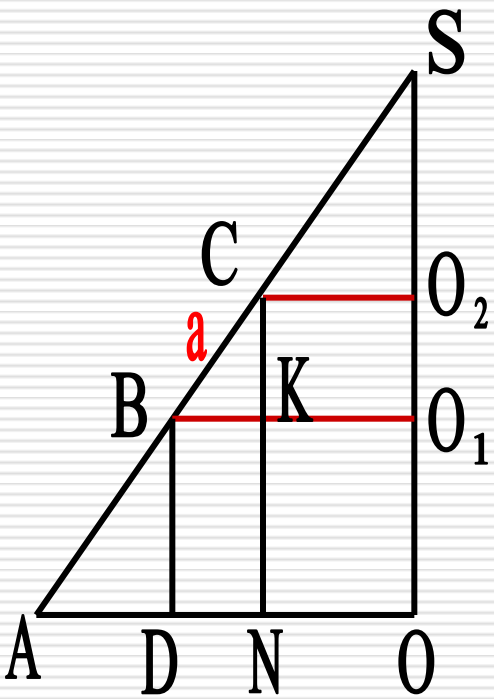
Ответ: $a = \dfrac{R\sqrt{3}tg\alpha}{\sqrt{2} + tg\alpha}$

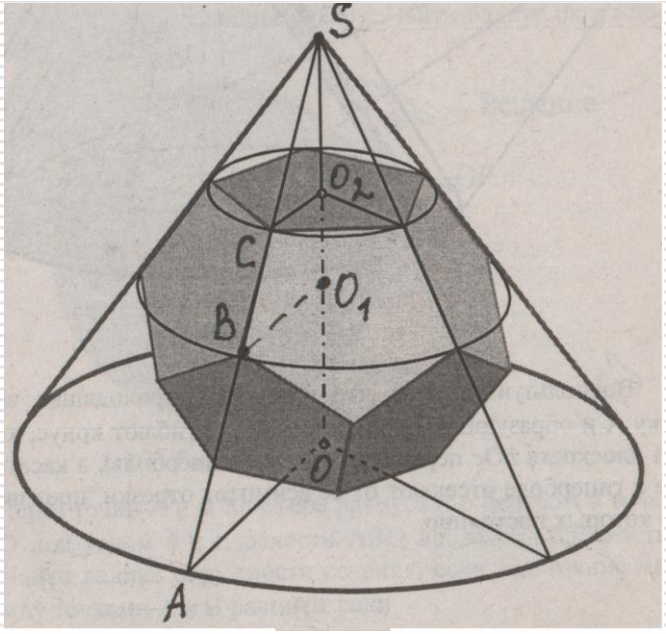
Задача №4. Вычислить объём конуса, описанного около правильного додекаэдра с ребром ***a*** так, что рёбра идущие к вершинам одной из его граней, лежат на образующих конуса, а противоположная грань – на основании конуса.

1) $OO_1 = \dfrac{a\tau^3}{\sqrt{\tau+2}}$

2) $CO_2 = \dfrac{a\tau}{\sqrt{\tau+2}}$

3) $BO_1 = \dfrac{a\tau^2}{\sqrt{\tau+2}}$





4) $$BK = BO_1 - CO_2 = \frac{a\tau^2}{\sqrt{\tau+2}} - \frac{a\tau}{\sqrt{\tau+2}} = \left|\tau^2 - \tau = 1\right| = \frac{a}{\sqrt{\tau+2}}$$

5) $$CK = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{\tau+2}} = \left|\tau + 2 - 1 = \tau + 1 = \tau^2\right| = \frac{a\tau}{\sqrt{\tau+2}}$$

6) $$tg\alpha = \frac{CK}{BK} = \tau$$

7) $$SO_2 = CO_2 \cdot tg\alpha = \frac{a\tau^2}{\sqrt{\tau+2}}$$

8) $$SO = SO_2 + O_2O = \frac{a\tau^2}{\sqrt{\tau+2}} + \frac{a\tau^3}{\sqrt{\tau+2}} = \frac{a\tau^4}{\sqrt{\tau+2}}$$

9) $$AO = \frac{SO}{tg\alpha} = \frac{a\tau^3}{\sqrt{\tau+2}}$$

10) $$V = \frac{1}{3}\pi \cdot AO^2 \cdot SO = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{a^3\tau^{10}}{(\sqrt{\tau+2})^3}$$

Ответ: $V = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{a^3\tau^{10}}{(\sqrt{\tau+2})^3}$