Содержание.

1. Введение.

Есть в школьной геометрии особые темы, которые ждешь с нетерпением, предвкушая встречу с невероятно красивым материалом. К таким темам можно отнести "Правильные многогранники". Здесь не только открывается удивительный мир геометрических тел, обладающих неповторимыми свойствами, но и интересные научные гипотезы. Правильные многогранники издавна производили большое впечатление на человека. В музеях хранятся игрушки и предметы неизвестного назначения, изготовленные в форме правильных многогранников. Например, в одесском археологическом музее хранится икосаэдр, изготовленный примерно в I веке до нашей эры.

В своём реферате я дала понятие правильного многогранника, доказала почему их существует всего пять, рассмотрела некоторые свойства правильных многогранников, выразила объёмы правильных многогранников через величину их ребра. Решила задачи на комбинации правильных многогранников друг с другом и с различными телами вращения. В реферате имеются и исторические сведения. Кроме того, привела примеры неожиданных встреч с правильными многогранниками. Все задачи, приведённые в реферате, решены мною самостоятельно. Для решения некоторых задач изготовила наглядные пособия.

Основными этапами работы над данной темой явились: подборка соответствующей литературы, изучение нужного для работы материала, систематизация материала, его применение к решению конкретных задач, составление презентации в Power Point.

Помимо школьного учебника мною была использована литература, список которой приведён в конце реферата.

2. Основная часть.

2.1. «Правильных многогранников вызывающе мало».

Ни одни геометрические тела не обладают таким совершенством и красотой, как правильные многогранники. А что такое «правильный многогранник»?

Многогранник называется правильным, если все его грани равные между собой правильные многоугольники и число ребер, выходящих из каждой вершины, одинаково.

"Правильных многогранников вызывающе мало, - написал когда-то Льюис Кэрролл, - *но этот весьма скромный по численности отряд сумел пробраться в самые глубины различных наук".*

Каково же это вызывающе малое количество и почему их именно столько. ***А сколько?*** Оказывается, ровно пять - ни больше, ни меньше. Сам факт существования всего пяти правильных многогранников удивителен – ведь правильных многоугольников на плоскости бесконечно много. Подтвердить этот факт можно с помощью развертки выпуклого многогранного угла. Действительно, в каждой вершине правильного многогранника должно сходиться одинаковое количество граней (не менее 3), каждая из которых является правильным многоугольником. Сумма плоских углов многогранного угла должна быть меньше 360°, иначе никакой многогранной поверхности не получится.

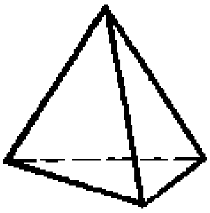
Пусть в вершине сходится $к$ правильных многоугольников, где $к \geq 3$ и $к$ - натуральное число.

Если грань - правильный треугольник, то его угол 60^{o}. Тогда неравенство $60^{o} \cdot к < 360^{o}$, имеет решение при $к = 3$ (тетраэдр), $к = 4$ (октаэдр), $к = 5$ (икосаэдр)

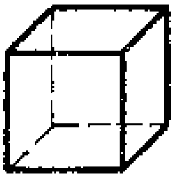
Если грань - квадрат, то его угол равен 90^{o} и неравенство $90^{o} к < 360^{o}$ имеет решение при $к = 3$ (куб).

Если грань - правильный пятиугольник, то его угол - 108^{o} и неравенство $108^{o}к < 360^{o}$ имеет решение при $к = 3$ (додекаэдр)

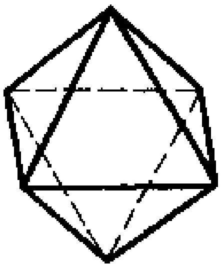
Если грань – правильный шестиугольник, то его угол - 120^{o} и неравенство $120^{o}к < 360^{o}$ при к ≥ 3 не имеет решений (так как даже $120^{o} \cdot 3 = 360$)°, т.е. шестиугольник (а также и 7, 8 и т.д – угольник) не может быть гранью правильного многогранника. Вот и получается, что правильных многогранников всего 5 и больше быть не может!



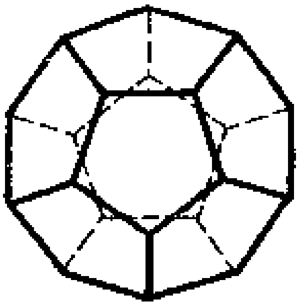
Тетраэдр



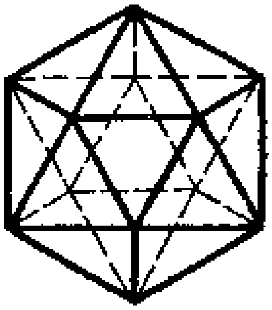
Куб



Октаэдр



Додекаэдр



Икосаэдр

Названия правильных многогранников пришли из Греции. Их открытие приписывается Пифагору. В дословном переводе с греческого "тетраэдр", "октаэдр", "гексаэдр", "додекаэдр", "икосаэдр" означают: "четырехгранник", "восьмигранник", "шестигранник", "двенадцатигранник", "двадцатигранник".

2.2. Теорема Эйлера.

Итак, было выяснено, что правильных многогранников ровно пять. А нет ли в них зависимости между количеством ребер, граней, вершин? Заполним таблицу:

Грани, вершины, рёбра

Вид	Г (грани)	В (вершины)	Р (рёбра)	В+Г-Р
	4	4	6	2
	6	8	12	2
	8	6	12	2
	12	20	30	2
	20	12	30	2

Как видно из таблицы, В + Г – Р есть величина постоянная, равная 2. Эту формулу *для любого выпуклого* многогранника получил знаменитый математик *Леонард Эйлер,* который долгое время жил в Росси и работал в Петербургской Академии наук, был похоронен на Смоленском кладбище в Петербурге. В 1956 году его прах перенесли в Ленинградский некрополь.

Между прочим, с помощью теоремы Эйлера можно, другим способом, доказать что существует не более пяти видов правильных многогранников.

В самом деле, пусть правильный многогранник имеет Г граней, каждая из которых – правильный n – угольник, а в каждой из вершин сходится по x рёбер. Тогда, пересчитывая рёбра, сходящиеся у каждой вершины, получим:

$$x \cdot B = 2P \quad \text{или} \quad B = \frac{2P}{x},$$

ибо каждое ребро попадает в пересчёт у обоих своих концов

Пересчитывая рёбра, расположенные в каждой грани, получим:

$$n \cdot Г = 2P \quad \text{или} \quad Г = \frac{2P}{n},$$

ибо здесь каждое ребро попадает в пересчёт тоже по 2 раза. По теореме Эйлера В + Г – Р = 2, то есть $\frac{2P}{x}+\frac{2P}{n}-P=2,$ *или* (*делим все члены на* $2P$)

$\frac{1}{x}+\frac{1}{n}-\frac{1}{2}=\frac{1}{P},$ *или,* $\frac{1}{x}+\frac{1}{n}=\frac{1}{P}+\frac{1}{2}$. (*)

Очевидно, что $n \geq 3$ и $x \geq 3$ (многоугольник имеет не менее трёх сторон, а в каждой вершине сходится не менее трёх граней). Если предположить, что одновременно и **n**>3, и **x** > 3, то $\frac{1}{n}+\frac{1}{x}\leq\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$, что делает равенство (*) невозможным. Отсюда следует, **что либо n = 3, либо x = 3.**

Пусть n = 3 (то есть грань имеет вид правильного треугольника), тогда равенство (*) примет вид: $\frac{1}{x}+\frac{1}{3}=\frac{1}{P}+\frac{1}{2}$

Если x = 3, то $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{1}{P}+\frac{1}{2},$ $\frac{1}{P}=\frac{2}{3}-\frac{1}{2},$ $\frac{1}{P}=\frac{1}{6},$ $P=6,\Rightarrow,Г=\frac{2P}{3}=4$. Это *тетраэдр.*

Если x = 4, то $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{1}{P}+\frac{1}{2},$ $\frac{1}{P}=\frac{7}{12}-\frac{1}{2},$ $\frac{1}{P}=\frac{1}{12},$ $P=12,$ $Г=\frac{24}{3}=8.$ Это *октаэдр.*

Если x = 5, то $\frac{1}{5}+\frac{1}{3}=\frac{1}{P}+\frac{1}{2},$ $\frac{1}{P}=\frac{8}{15}-\frac{1}{2}=\frac{1}{30},$ $P=30,$ $Г=\frac{60}{3}=20$. Это *икосаэдр.*

Если x = 6, то $\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{P}+\frac{1}{2},$ $\frac{1}{P}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0,$ *решения нет.*

При x = 7, x = 8 и так далее, выражение $\frac{1}{P}$ будет отрицательным, то есть других правильных многогранников, грань которых правильный треугольник, не существует.

Пусть x = 3 (то есть в каждой вершине сходится три ребра), тогда равенство (*) примет вид: $\frac{1}{3}+\frac{1}{n}=\frac{1}{P}+\frac{1}{2}.$

Случай, когда *n = 3* нами уже рассмотрен (это тетраэдр).

Пусть n = 4, то есть грань – квадрат, тогда $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{1}{P}+\frac{1}{2}$, $\frac{1}{P}=\frac{1}{12}$, $P=12$, $Г=\frac{2P}{n}=\frac{24}{4}=6$. Это *гексаэдр (куб).*

Пусть n = 5, то есть грань – правильный пятиугольник, тогда $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{1}{P}+\frac{1}{2}$, $\frac{1}{P}=\frac{8}{15}-\frac{1}{2}=\frac{1}{30}$, $P=30$, $Г=\frac{60}{4}=12$. Это *додекаэдр.*

Если **n** = 6 (или **n** > 6), то $\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{P}+\frac{1}{2}$, $\frac{1}{P}=0$ $(или \ \frac{1}{P}<0)$, то есть решения нет. Значит не существует других видов правильных многогранников.

Что и требовалось доказать.

2.3. Наблюдения Рене Декарта.

А теперь рассмотрим разность между 360º и суммой плоских углов при вершине правильных многогранников и найдём сумму всех таких разностей (математики называют их угловыми дефектами) для каждого многогранника.

Вид многогранника	**Количество вершин**	**Сумма плоских углов при одной вершине (А)**	**Угловые дефекты**	**Сумма всех угловых дефектов**
Тетраэдр	4	$60^\circ \cdot 3 = 180^\circ$	180º	$180^\circ \cdot 4 = 720^\circ$
Куб	8	$90^\circ \cdot 3 = 270^\circ$	90º	$90^\circ \cdot 8 = 720^\circ$
Октаэдр	6	$60^\circ \cdot 4 = 240^\circ$	120	$120^\circ \cdot 6 = 720^\circ$
Додекаэдр	20	$108^\circ \cdot 3 = 324^\circ$	36º	$36^\circ \cdot 20 = 720^\circ$
Икосаэдр	12	$60^\circ \cdot 5 = 300^\circ$	60º	$60^\circ \cdot 12 = 720^\circ$

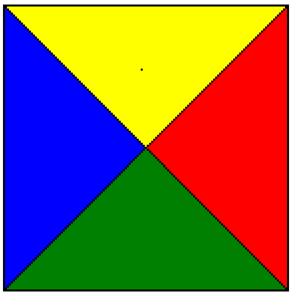
Подобные наблюдения привели *Рене Декарта (1596 – 1650)* к открытию и доказательству теоремы, утверждающей, что сумма всех угловых дефектов у однородных (то есть многогранников, грани которых правильные многоугольники) неизменна и равна 720º.

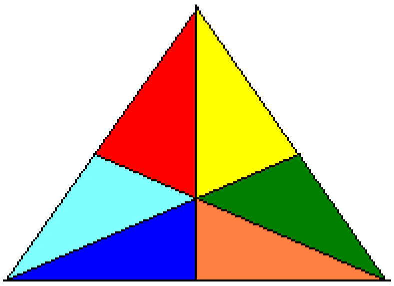
2.4.Почему правильные многогранники называют Платоновыми телами?

Правильные многогранники еще называют телами Платона. Отсюда не следует, что эти многогранники были им открыты. Это название они получили потому, что занимали важное место в философской концепции Платона об устройстве мироздания. Четыре многогранника олицетворяли в ней четыре сущности или "стихии". Стихиями философы древности называли вещества, из которых путём сгущения и разряжения, охлаждения и нагревания образуются все тела.

Тетраэдр символизировал огонь, т.к. его вершина устремлена вверх. Икосаэдр - воду, т.к. он самый "обтекаемый". Куб - землю, как самый "устойчивый". Октаэдр - воздух, как самый "воздушный". Пятый многогранник, додекаэдр, воплощал в себе "все сущее", символизировал все мироздание, считался главным – его по латыни стали называть quinta essentia.

Платон представлял атомы как плоские треугольники – прямоугольные треугольники двух видов: равнобедренные и с катетом, равным половине гипотенузы, то есть с углами 30º и 60º. Почему именно так? Потому, что они удобны для конструирования более сложных фигур. Так, четыре равнобедренных треугольника составляют квадрат, служащий гранью куба, а из шести треугольников второго вида образуется равносторонний треугольник, являющийся одной из четырёх граней тетраэдра, восьми граней октаэдра и двадцати граней икосаэдра.





Платон пытался даже отразить взаимоотношения между стихиями:

1 вода = 2 воздуха + 1 огонь.

Это «уравнение» надо понимать так. В элементе воды – икосаэдре – 20 граней, образованных равносторонними треугольниками, которые в свою очередь составлены 6 прямоугольными треугольниками. Следовательно, сложный атом-икосаэдр состоит из $6 \cdot 20 = 120$ простых атомов-треугольников. В элементе воздуха – октаэдре – $8 \cdot 6 = 48$ атомов-треугольников, в элементе огонь – тетраэдре – $4 \cdot 6 = 24$. Тогда,

$$120 = 2 \cdot 48 + 24,$$

$$120 = 96 + 24.$$

Сам Платон не был математиком, но его школа придавала математике большое значение. Платон считал необходимым условием для занятий философией знание математики. Недаром над входом в «Академию» будто бы помещалась надпись: «Пусть не знающий математики не входит сюда».

Гармоничные отношения древние греки считали основой мироздания, поэтому четыре стихии у них были связаны ещё и такой пропорцией:

$$\frac{земля}{вода} = \frac{воздух}{огонь}$$

Первая система элементов, включавшая четыре элемента - землю, воду, воздух и огонь, - была канонизирована Аристотелем. Эти элементы оставались четырьмя краеугольными камнями мироздания в течение многих веков. Вполне возможно отождествлять их с известными нам четырьмя состояниями вещества – твердым, жидким, газообразным и плазменным.

На подобные теории, понятно, невозможно смотреть как на вклад в науку: они интересны лишь как момент в истории человеческой мысли, когда она ещё не видела необходимости считаться с фактами и находила возможным дать умозрительное объяснение всех тайн мироздания.

2.5. Евклид и **XIII** книга «Начал».

Этим красивым телам (то есть правильным многоугольникам) посвящена 13-я книга "Начал" Евклида.

Арси Томсон писал: *«Евклид вовсе не собирался выпускать систематический учебник геометрии. Он задался целью написать сочинение о правильных многогранниках, рассчитанное на начинающих, в силу чего ему пришлось изложить всё необходимое».*

Книга **XIII**, насчитывающая 18 предложений, частично возвращается к предмету книги **IV**, вписанным в круг правильным многоугольникам, в особенности к правильному треугольнику и пятиугольнику, чтобы затем перейти к задаче построения и «охватывания заданной сферой» каждого из пяти правильных многогранников: в предложении 13 – тетраэдра, в 14 – октаэдра, в 15 – куба, в 16 – икосаэдра и в 17 – додекаэдра. Понимая под выражением «охватить сферой» построение описанной сферы, Евклид выводит для первых трёх случае отношение между диаметром сферы и ребром соответствующего многогранника; для остальных двух он указывает лишь, что сторона икосаэдра будет «меньшей» иррациональной, а сторона додекаэдра – вычетом. Предложение 18 сравнивает между собой длины рёбер пяти правильных многогранников. Книга заканчивается добавлением, в котором доказывается, что кроме указанных пяти нельзя построить других правильных многогранников.

Выполним некоторые вычисления, проделанные Евклидом.

1. Найдём отношение диаметра описанной сферы и ребра тетраэдра.

Пусть a – длина ребра тетраэдра. Продолжим высоту тетраэдра до пересечения со сферой, тогда SS_1 – диаметр сферы. Найдём отношение $\frac{SS_1}{a}$.

ΔSS_1C, $\angle C = 90°$, $SC = a$,

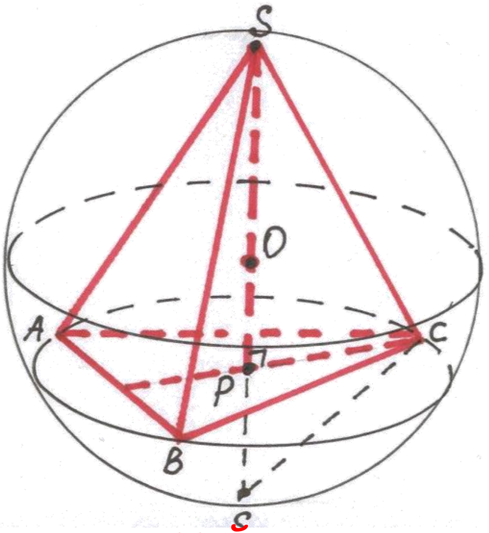
$PC = \frac{a}{\sqrt{3}}$, $SP = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$SC^2 = SS_1 \cdot SP$, $SS_1 = SC^2 : SP$,

$SS_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{a\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

$\frac{SS_1}{a} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{2}$



2. Найдём отношение диаметра описанной сферы и ребра октаэдра.

Пусть *a* – длина ребра октаэдра,

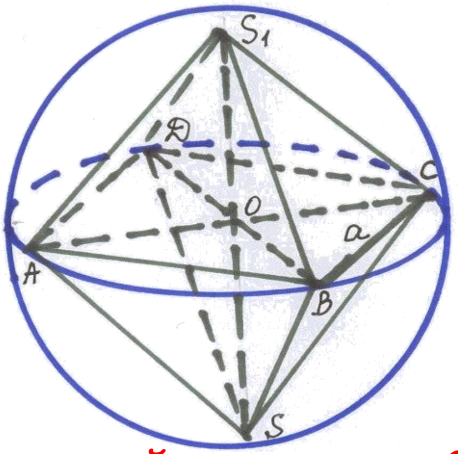
O – центр сферы, тогда

$OC = \frac{a\sqrt{2}}{2} = OS_1$

$SS_1 = a\sqrt{2}$

$\frac{SS_1}{a} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$

Ответ: $\sqrt{2}$



3. Найдём отношение диаметра описанной сферы и ребра куба.

Пусть *a* – длина ребра куба,

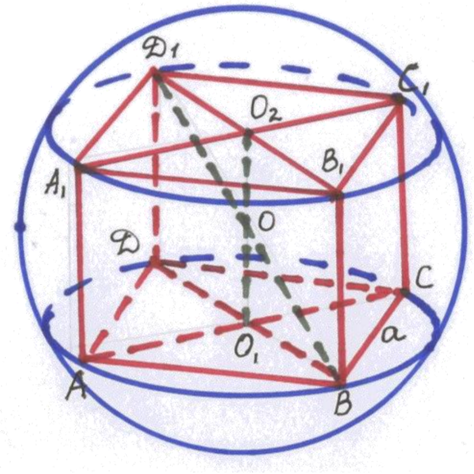
O_1, O_2 – центры оснований куба,

O – центр сферы, $OO_1 = OO_2$.

Диагональ $BD_1 = a\sqrt{3}$ - диаметр сферы,

тогда $\frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$.

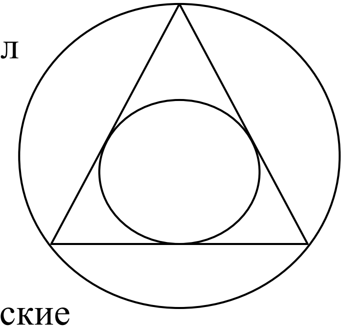
Ответ: $\sqrt{3}$



2.6. Правильные многогранники в системе мира Кеплера.

Важное место занимали правильные многогранники в системе гармоничного устройства мира И. Кеплера.

В один из зимних дней 1595 года, пока он набрасывал на доске перед своими учениками чертёж, ему вдруг пришла в голову мысль, определившая всю его дальнейшую жизнь. Кеплер начертил равносторонний треугольник с вписанной и описанной окружностями и неожиданно осознал, что эти окружности можно связать с орбитами планет.



Довольно быстро он понял, что плоские геометрические фигуры не позволяют найти разумный ответ, и обратился к геометрическим телам – правильным многогранникам. В письме *от 3 октября 1595 года* к своему другу Мэстлину Кеплер писал: «Мы видим, что Бог сотворил мировые тела в известном числе (во времена Кеплера было известно лишь 5 планет без спутников и довольно проблематичное шестое тело – Земля) … до сотворения мира не было никакого числа … число есть принадлежность вещей. Но ни в линии, ни в поверхности нет никакого числа – они представляют бесконечность; поэтому остаются только тела; но неправильные тела нужно отбросить как несвойственные благоустроенному созданию. Таким образом, остаются только шесть тел: шар, или, лучше сказать, внутренность сферы и пять правильных многогранников. В шаре заключается троица: сферическая поверхность, центр и вместимость; и в мире мы видим небо неподвижных звёзд, Солнце и эфир, как в Троице – Сына, Отца и Духа».

Кеплер предположил, что пять планетных сфер должны располагаться вокруг Солнца таким образом, чтобы между ними вписывались правильные многогранники. Проделанная Кеплером работа была под силу только незаурядному математику.

Между самыми далёкими сферами Сатурна и Юпитера он поместил куб так, чтобы вершинами он касался сферы Сатурна, а гранями – сферы Юпитера. Между Юпитером и Марсом Кеплер поместил тетраэдр и так далее с тем же расчётом, чтобы гранями каждый многогранник касался внутренней, меньшей сферы, а вершинами был вписан во внешнюю, большую сферу.

Результаты своих вычислений Кеплер опубликовал в 1596 году в книге под названием «Тайна Вселенной». Кеплер не сомневался, что тайна Вселенной открыта: ведь он не только объяснил основу устройства Солнечной системы, но и открыл, почему планет именно шесть, а не «двадцать или сто». К сожалению, склонный к умозрительным построениям учёный попал на ложный путь. Сегодня мы можем с уверенностью утверждать, что расстояния между планетами и их число никак не связаны ни с какими многогранниками. Конечно, структура Солнечной системы не является случайной, но истинные причины, по которой она устроена так, а не иначе, до сих пор не известны.

Иоганн Кеплер также написал этюд «О снежинке», в котором высказал такое замечание: «Среди правильных тел самое первое, начало и родитель остальных – куб, а его, если позволительно так сказать, супруга – октаэдр, ибо у октаэдра столько вершин, сколько у куба граней».

Кеплер первый заметил, что наряду с правильными выпуклыми многогранниками могут существовать правильные звёздчатые, и нашёл два таких многогранника – звёздчатый октаэдр и малый звёздчатый додекаэдр.

2.7. Неожиданные встречи с правильными многогранниками.

Где еще можно увидеть эти удивительные тела?

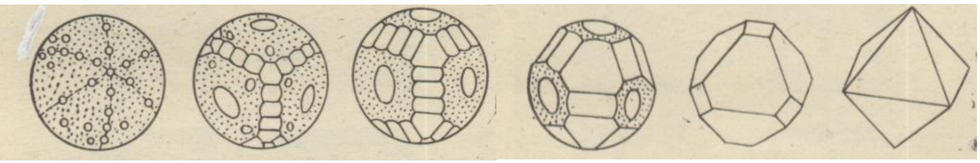
В живописи. Перед вами картины испанского художника Сальвадора Дали: распятие Христа, сам крест изображён в виде кубов. Другая картина - «Тайная вечеря», где Иисус изображён с апостолами внутри прозрачного додекаэдра. Имеется изображение додекаэдра и на масонской печати, и в книге Петра Апиана, посвящённой Копернику. В известной гравюре «Меланхолия» Альбрехта Дюрера на переднем плане изображён додекаэдр. В 1525 году Дюрер написал трактат, в котором представил пять правильных многогранников, поверхности которых служат хорошими моделями перспективы. Правильные многогранники полюбились и современным дизайнерам.

Икосаэдр оказался в *центре внимания биологов* в их спорах относительно формы вирусов. Вирус не может быть совершенно круглым, как считалось ранее. Чтобы установить его форму, брали различные многогранники, направляли на них свет под теми же углами, что и на вирус. Оказалось, что только один многогранник дает точно такую же тень - икосаэдр.

Чем же вызвана такая природная геометризация? Может быть, тем, что из всех многогранников с таким же количеством граней именно икосаэдр имеет наибольший объем и наименьшую площадь поверхности. Это его геометрическое свойство позволяет экономить генетическую информацию.

Правильные многогранники - самые выгодные фигуры. И природа этим широко пользуется. Кристаллы некоторых знакомых нам веществ имеют форму правильных многогранников. Так, куб передает форму кристаллов поваренной соли $NaCl$, монокристалл алюминиево-калиевых квасцов $(KAlSO_4)_2 \cdot 12H_2O$ имеет форму октаэдра. Интересно, что если насильственно изменить форму кристалла, например тех же квасцов, а затем поместить кристалл, лишённый своей правильной формы, в насыщенный раствор, то он постепенно (как показано на фотографиях) восстанавливает свою правильную

форму, форму октаэдра. Кристалл «добился своего» и дальше его форма уже не меняется.

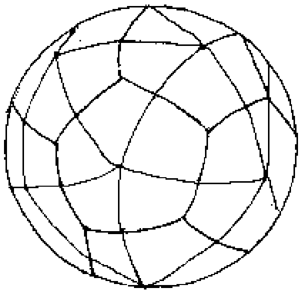


1 2 3 4 5 6

Удивительная прочность и оптические свойства алмаза также связаны с его строением: полная ячейка алмаза имеет кубическую решётку, содержащую 18 атомов углерода, из которых 8 расположены в вершинах куба, 6 – в центрах его граней, а это вершины октаэдра, 4 – в центрах четырёх (из восьми) кубов, образованных делением элементарной ячейки тремя взаимно перпендикулярными плоскостями. В процессе синтеза кристаллов алмаза при низких температурах растут в основном кристаллы кубической формы, при высоких – октаэдры.

Кристалл сернистого колчедана FeS имеет форму додекаэдра, сурьменистый сернокислый натрий - тетраэдра, бор - икосаэдра. Правильные многогранники определяют форму кристаллических решеток некоторых химических веществ.

Идеи Пифагора, Платона, И. Кеплера о связи правильных многогранников с гармоничным устройством мира уже в наше время нашли свое продолжение в интересной научной гипотезе, авторами которой (в начале 80-х годов 20 века) явились московские инженеры В. Макаров и В. Морозов. Они считают, что ядро Земли имеет форму и свойства растущего кристалла, оказывающего воздействие на развитие всех природных процессов, идущих на планете. Лучи этого кристалла, а точнее, его силовое поле, обусловливают икосаэдрододекаэдрическую структуру Земли, проявляющуюся в том, что в земной коре как бы проступают проекции вписанных в земной шар правильных многогранников: икосаэдра и додекаэдра. Их 62 вершины и середины ребер, называемых авторами узлами, обладают рядом специфических свойств, позволяющих объяснить некоторые непонятные явления.



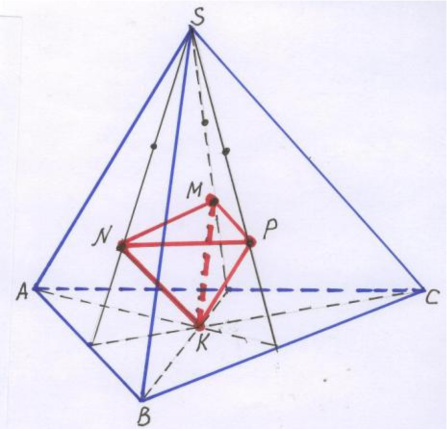
Если нанести на глобус очаги наиболее крупных и примечательных культур и цивилизаций Древнего мира, можно заметить закономерность в их расположении относительно географических полюсов и экватора планеты. Многие залежи полезных ископаемых тянутся вдоль икосаэдрово - додекаэдровой сетки. Еще более удивительные вещи происходят в местах пересечения этих ребер: тут располагаются очаги древнейших культур и цивилизаций: Перу, Северная Монголия, Гаити, Обская культура и другие. В этих точках наблюдаются максимумы и минимумы атмосферного давления, гигантские завихрения Мирового океана, здесь шотландское озеро Лох-Несс, Бермудский треугольник. Дальнейшие исследования Земли, возможно, определят отношение к этой красивой научной гипотезе, в которой, как видно, правильные многогранники занимают важное место.

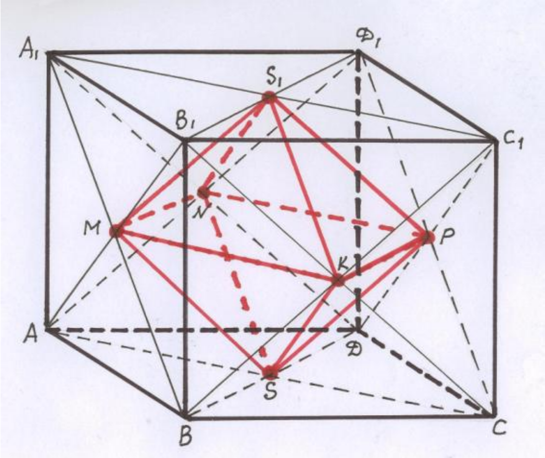
2.8. Комбинации правильных многогранников.

Правильные многогранники можно вписывать друг в друга тремя способами.

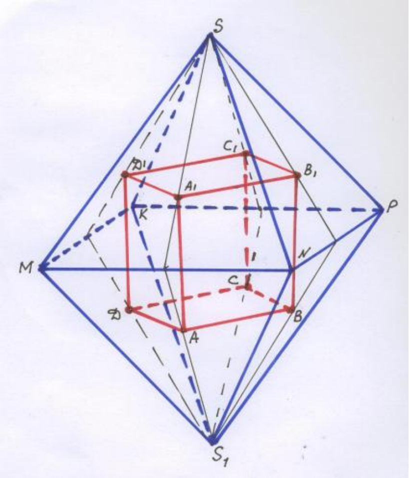
Способ 1. Центры граней одного многогранника являются вершинами другого.

Например, центры граней одного тетраэдра являются вершинами другого тетраэдра.

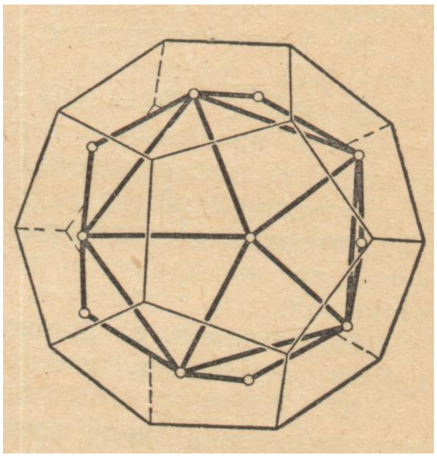




Центры граней куба являются вершинами октаэдра.

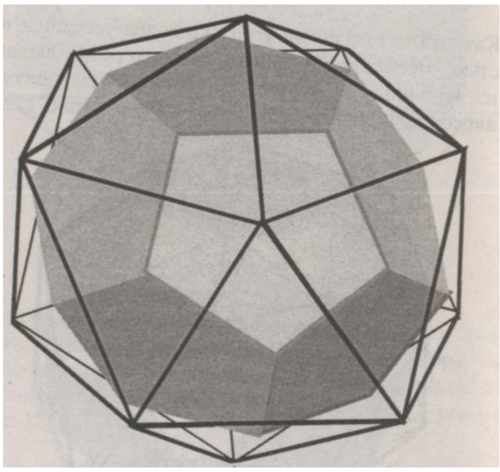


Центры граней октаэдра являются вершинами куба.



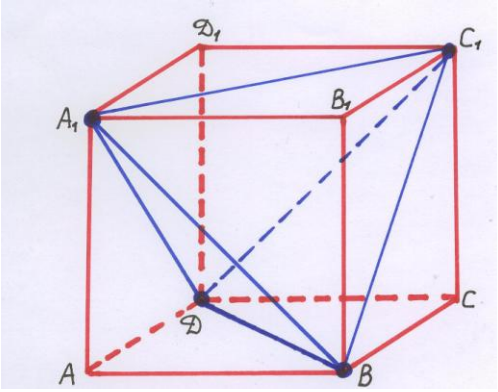
Центры граней додекаэдра являются вершинами икосаэдра.

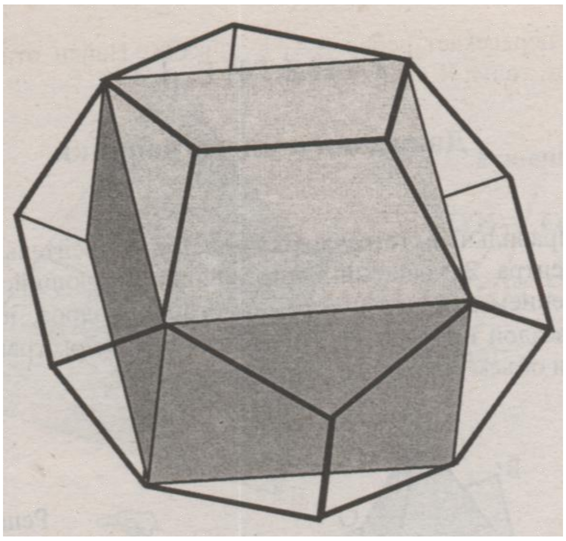
Центры граней икосаэдра являются вершинами додекаэдра.



Способ 2. Некоторые вершины одного многогранника являются вершинами другого.

Таким образом можно вписать тетраэдр в куб.

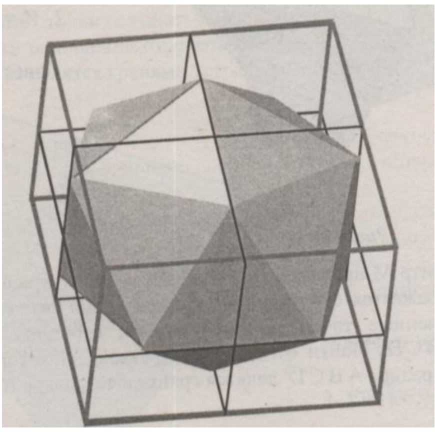


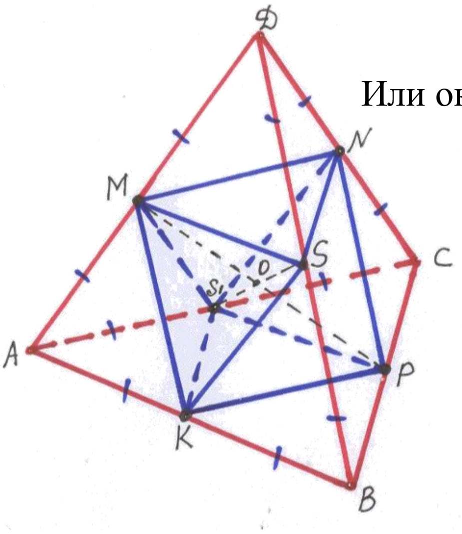


Или куб - в додекаэдр.

Способ 3. Определённые точки на рёбрах или гранях одного многогранника являются вершинами другого многогранника.

Таким образом можно вписать икосаэдр в куб (в этом случае каждая грань куба содержит одно ребро икосаэдра).





Или октаэдр – в тетраэдр.

Далее будут показаны ещё некоторые примеры.

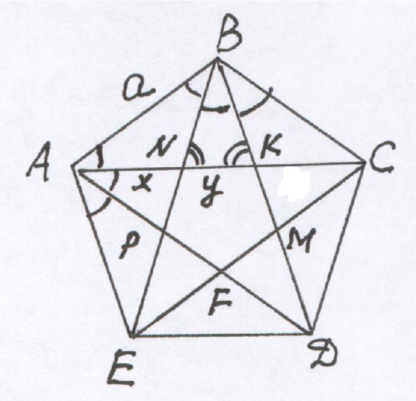
2.9. Правильные многогранники и золотое сечение.

Гранью додекаэдра является правильный пятиугольник, который лежит в основе «божественной» пропорции – золотого сечения.

Золотое сечение – деление отрезка на две части, при котором весь отрезок так относится к его большей части, как большая часть к меньшей.

В правильном пятиугольнике это отношение равно отношению отрезков, на которые делится каждая из двух диагоналей их точкой пересечения.

Диагональ АС поделена таким образом точкой N или точкой К. Но и часть диагонали, отрезок АК, делится точкой N в отношении золотого сечения. Это отношение равно также отношению диагонали l правильного пятиугольника к его стороне a, что было известно ещё во времена Пифагора. Недаром пентакл (или пифагорейская звезда) был тайным знаком пифагорейцев, по которому они узнавали друг друга. Пентакл – дохристианский символ, относившийся к поклонению и обожествлению Природы. Он символизирует Венеру, богиню любви и красоты. Каждые 8 лет планета Венера описывает совершенно правильный пентакл по большому кругу небесной сферы. Как бы отдавая дань этому явлению, древние греки устраивали Олимпийские игры каждые 8 лет. Пятиконечная звезда чуть не стала символом игр, но в последний момент её модифицировали: 5 остроконечных концов звезды заменили на 5 колец.



Введём обозначения: $AN = NB = BK = \ldots = x,\ NK = KM = MF = \ldots = y,$

$AC = \ell = 2x + y,\ AB = a.$

ΔABK – равнобедренный (36°, 72°, 72°), $\Rightarrow$, $a = x + y,\ \ell - a = 2x + y - x - y = x$

ΔABK ~ ΔNBK $\Rightarrow \dfrac{AK}{BK} = \dfrac{BK}{NK}, \Rightarrow \dfrac{x+y}{x} = \dfrac{x}{y} \Rightarrow \dfrac{AK}{AN} = \dfrac{AN}{NK} \Rightarrow$ точка N делит отрезок AK в отношении золотого сечения.

$\triangle ABC \sim \triangle ANB \Rightarrow \frac{AC}{AB}=\frac{AB}{BN} \Rightarrow \frac{2x+y}{x+y}=\frac{x+y}{x} \Rightarrow \frac{AC}{AK}=\frac{AK}{KC}$ точка К делит диагональ АС в отношении золотого сечения, но $2x+y=\ell, \quad x+y=a, \quad x=\ell-a, \Rightarrow \frac{\ell}{a}=\frac{a}{\ell-a}$, $\Rightarrow$, диагональ правильного пятиугольника и его сторона находятся в отношении золотого сечения.

Обозначается золотое сечение буквой τ. Таким образом:

$\tau=\frac{\ell}{a}=\frac{a}{\ell-a}$, то есть ***τ*** удовлетворяет уравнению $\boldsymbol{\tau^2-\tau-1=0}$**.** Почему?

Так как: $\ell^2-\ell a=a^2$, то

выполним почленное деление обеих частей на a^2, имеем:

$$\left(\frac{\ell}{a}\right)^2-\frac{\ell}{a}-1=0, \quad \tau^2-\tau-1=0,$$

$$D=\sqrt{5}, \quad \tau>0, \quad \tau=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Применение золотого сечения при решении задач связано с использованием следующего свойства:

$\boldsymbol{\tau^2=\tau+1}$

$\boldsymbol{\tau^3=2\tau+1}$

$\boldsymbol{\tau^4=3\tau+2}$

$\boldsymbol{\tau^5=5\tau+3}$

…

$\boldsymbol{\tau^{n+1}=a_n\tau+a_{n-1}}$, **где a_n - числа Фибоначчи – 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 …**

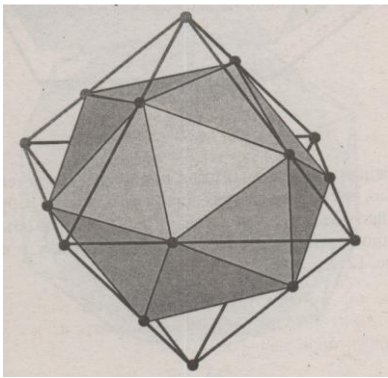
Действительно, $\tau^2=\tau+1$ следует из уравнения.

$\tau^3=\tau^2\cdot\tau=(\tau+1)\cdot\tau=\tau^2+\tau=\tau+1+\tau=2\tau+1,$

$\tau^4=\tau^3\cdot\tau=(2\tau+1)\cdot\tau=$

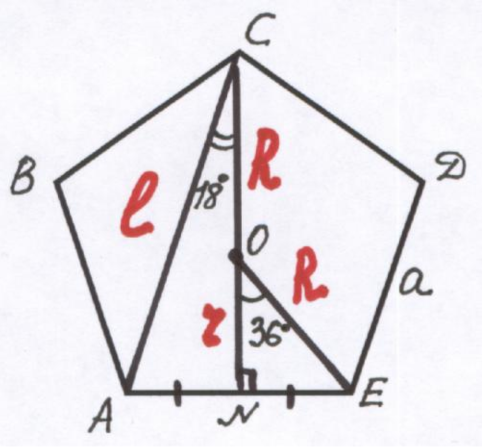
$=2\tau^2+\tau=2(\tau+1)+\tau=3\tau+2.$

Остальное доказывается аналогично.



Оказывается, если проведено золотое сечение каждого ребра октаэдра (смотри рисунок), то точки деления являются вершинами икосаэдра.

Вспомогательные задачи.



Задача №1. Дан правильный пятиугольник, длина стороны которого a. Выразить через число τ радиус вписанной окружности; радиус описанной окружности; площадь данного пятиугольника.

Решение.

$$\sin 18^0 = \frac{\frac{a}{2}}{\ell} = \frac{a}{2\ell} = \frac{1}{2\cdot\frac{\ell}{a}} = \frac{1}{2\tau}$$

$$\cos 18^0 = \sqrt{1-\frac{1}{4\tau^2}} = \sqrt{\frac{4\tau^2-1}{4\tau^2}} = \frac{\sqrt{(2\tau-1)(2\tau+1)}}{2\tau} = \frac{\sqrt{(2\tau-1)\cdot\tau^3}}{2\tau} = \frac{\tau\sqrt{\tau\cdot(2\tau-1)}}{2\tau} =$$

$$= \frac{\sqrt{2\tau^2-\tau}}{2} = \frac{\sqrt{2(\tau+1)-\tau}}{2} = \frac{\sqrt{\tau+2}}{2}$$

$$\cos 36^0 = 2\cos^2 18^0 - 1 = \frac{\tau+2}{2} - 1 = \frac{\tau}{2}$$

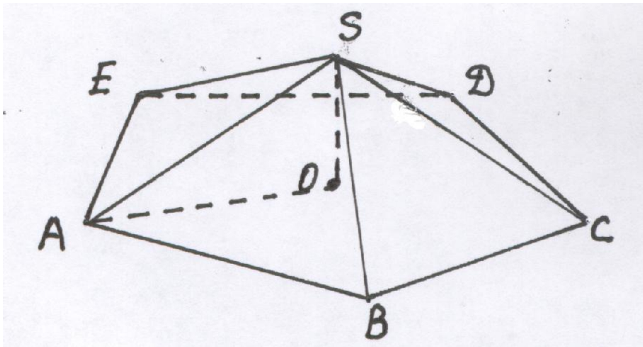
$$\sin 36^0 = 2\sin 18^0 \cos 18^0 = 2\cdot\frac{1}{2\tau}\frac{\sqrt{\tau+2}}{2} = \frac{\sqrt{\tau+2}}{2\tau}$$

$$R_5 = \frac{a}{2\sin 36^0} = \frac{a\tau}{\sqrt{\tau+2}} \qquad r_5 = R_5\cdot\cos 36^0 = \frac{a\tau}{\sqrt{\tau+2}}\cdot\frac{\tau}{2} = \frac{a\tau^2}{2\sqrt{\tau+2}}$$

$$S_5 = 5\cdot\frac{1}{2}a\cdot r = \frac{5}{2}\cdot a\cdot\frac{a\tau^3}{2\sqrt{\tau+2}} = \frac{5a^2\tau^2}{4\sqrt{\tau+2}}$$

Ответ: $R_5 = \frac{a\tau}{\sqrt{\tau+2}}$, $r_5 = \frac{a\tau^2}{2\sqrt{\tau+2}}$, $S_5 = \frac{5a^2\tau^2}{4\sqrt{\tau+2}}$

Задача №2. Выразить через τ длину высоты и объём правильной пятиугольной пирамиды, боковые рёбра и стороны основания которой равны a.



Решение.

ΔSAO, $\angle O = 90°$, $SA = a$, $AO = R_5$

$$h_5 = SO = \sqrt{a^2 - R_5^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2\tau^2}{\tau+2}} = a\sqrt{\frac{\tau+2-\tau^2}{\tau+2}} = a\sqrt{\frac{\tau+2-\tau-1}{\tau+2}} = \frac{a}{\sqrt{\tau+2}}$$

$$V_5 = \frac{1}{3}\cdot S_5 \cdot h_5 = \frac{1}{3}\cdot\frac{5a^2\tau^2}{4\sqrt{\tau+2}}\cdot\frac{a}{\sqrt{\tau+2}} = \frac{5a^3\tau^2}{12(\tau+2)}$$

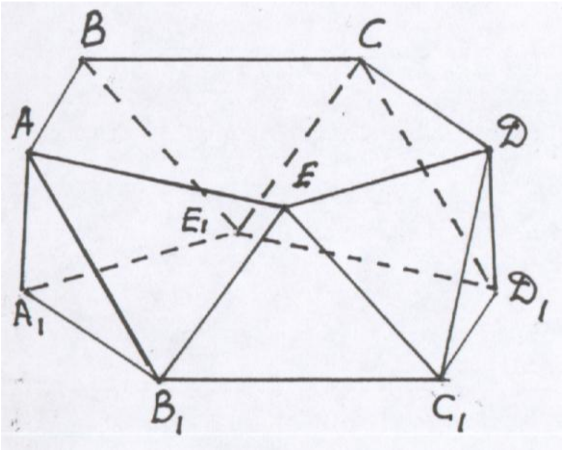
$5\tau^2 = \tau^2 + 4\tau^2 = \tau^2 + 4(\tau + 1) = \tau^2 + 4\tau + 4 = (\tau + 2)^2$, тогда

$$V_5 = \frac{a^3(\tau+2)^2}{12(\tau+2)} = \frac{1}{12}a^3(\tau+2)$$

Ответ: $h_5 = \frac{a}{\sqrt{\tau+2}}$, $V_5 = \frac{1}{12}a^3(\tau+2)$

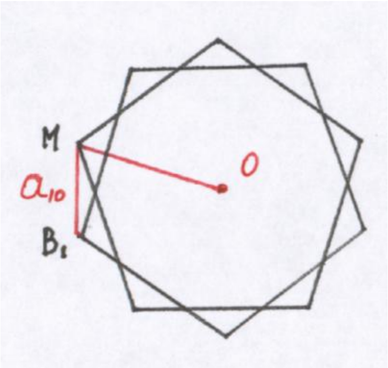
Задача №3. Выразить через τ длину высоты и объём антипризмы, основания которой – правильные пятиугольники и все рёбра равны *a*.

Решение.



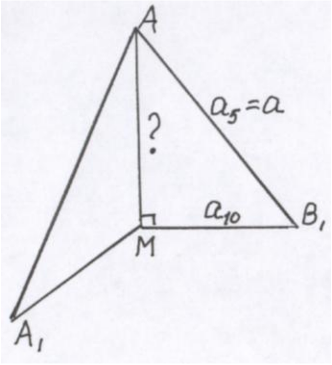
Антипризма – полуправильный многогранник, у которого две параллельные грани – равные между собой правильные n – угольники, а остальные 2n граней – правильные треугольники.

1) Опустим перпендикуляр из точки A на плоскость ($A_1B_1C_1$): получим точку M, тогда MB_1 сторона правильного десятиугольника, вписанного в ту же окружность, в которую вписан пятиугольник.



Найдём сторону десятиугольника:

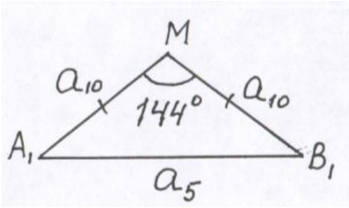
$$MB_1 = a_{10} = 2R_5 \cdot \sin 18° = 2 \cdot \frac{a\tau}{\sqrt{\tau+2}} \cdot \frac{1}{2\tau} = \frac{a}{\sqrt{\tau+2}}$$



АМ – высота антипризмы.

$$AM = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{\tau+2}} = \sqrt{\frac{a^2(\tau+1)}{\tau+2}} = \sqrt{\frac{a^2\tau^2}{\tau+2}} = \frac{a\tau}{\sqrt{\tau+2}}$$

Для нахождения объёма антипризмы найдём объём прямой правильной десятиугольной призмы и отнимем от него десять объёмов треугольных призм с высотой, равной АМ и основанием в виде равнобедренного треугольника со сторонами a_{10}, a_{10} и a_5.



$$S_{10} = 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot R_5^2 \cdot \sin 36° = 5 \cdot \frac{a^2\tau^2}{\tau+2} \cdot \frac{\sqrt{\tau+2}}{2\tau} = \frac{5a^2\tau}{2\sqrt{\tau+2}}$$

$$V_{10} = S_{10} \cdot AM = \frac{5a^2\tau}{2\sqrt{\tau+2}} \cdot \frac{a\tau}{\sqrt{\tau+2}} = \frac{5a^3\tau^2}{2(\tau+2)} = \frac{a^3(\tau+2)^2}{2(\tau+2)} = \frac{1}{2}a^3(\tau+2)$$

$$S_3 = \frac{1}{2}a_{10}^2 \cdot \sin 144° = \frac{1}{2}a_{10}^2 \cdot \sin 36° = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{\tau+2} \cdot \frac{\sqrt{\tau+2}}{2\tau} = \frac{a^2}{4\tau\sqrt{\tau+2}}$$

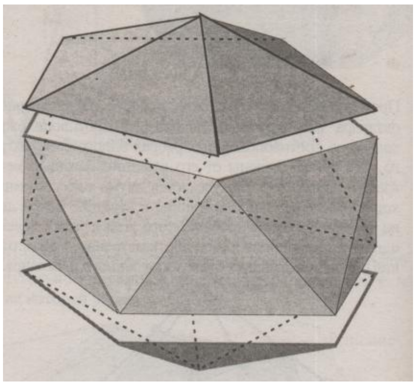
$$V_3 = \frac{1}{3} \cdot S_3 \cdot AM = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{4\tau\sqrt{\tau+2}} \cdot \frac{a\tau}{\sqrt{\tau+2}} = \frac{1}{12} \cdot \frac{a^3}{\tau+2}$$

$$V_{антипризмы} = V_{10} - 10 \cdot V_3 = \frac{1}{2}a^3(\tau+2) - \frac{5}{6}a^3 \cdot \frac{1}{\tau+2} = \frac{1}{6}a^3 \cdot \left(3(\tau+2) - \frac{5}{\tau+2}\right) = \frac{1}{6}a^3 \cdot \left(\frac{3(\tau+2)^2 - 5}{\tau+2}\right) =$$

$$= \frac{1}{6}a^3\left(\frac{3 \cdot 5\tau^2 - 5}{\tau+2}\right)$$

$15\tau^2 - 5 = 15(\tau + 1) - 5 = 15\tau + 10 = 5(3\tau + 2) = 5\tau^4 = 5\tau^2 \cdot \tau^2 = (\tau + 2)^2 \cdot \tau^2$

$$V_{антипризмы} = \frac{1}{6}a^3\tau^2(\tau+2)$$



Теперь можно найти объём икосаэдра:

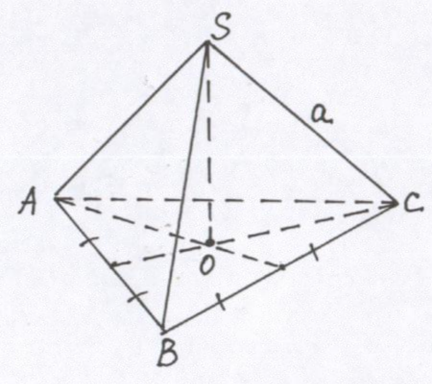
V = $V_{атипризмы}$ + $2V_5$

$$V = \frac{1}{6}a^3\tau^2(\tau+2)+2\cdot\frac{1}{12}a^3(\tau+2)=\frac{1}{6}a^3(\tau+2)(\tau^2+1)$$

$$V = \frac{1}{6}a^3(\tau+2)\cdot(\tau+1+1)=\frac{1}{6}a^3(\tau+2)^2=\frac{5}{6}a^3\tau^2$$

2.10. Выражение объёмов правильных многогранников через длину их ребра.

1. Объём тетраэдра, длина ребра которого равна *a*.



SO ⊥ (ABC), $S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

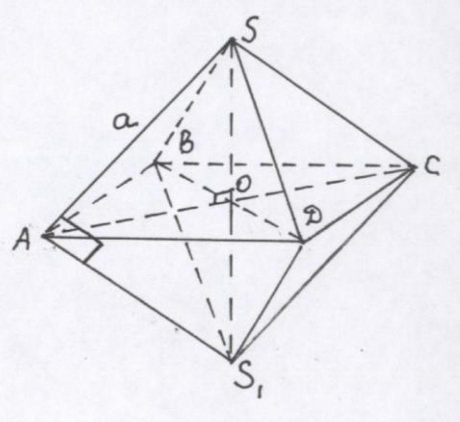
$\Delta SAO, \quad \angle O = 90°, \quad AS = a,$

$AO = \dfrac{a}{\sqrt{3}}, \quad SO = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{3}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$V = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$

Ответ: $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$

2. Объём октаэдра, длина ребра которого равна *a*.



$S_{ABCD} = a^2, \; SS_1 = a\sqrt{2}$

$$V = 2V_{SABCD} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SS_1 = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot a\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$$

Ответ: $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$

3. Объём куба, длина ребра которого равна *a*.

$V = a^3$

Ответ: $V = a^3$

4. Объём икосаэдра, длина ребра которого равна *a*.

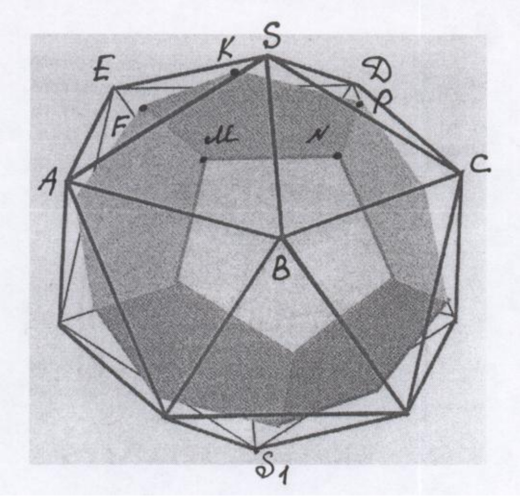
В предыдущем пункте мы получили формулу $V = \dfrac{5}{6}a^3\tau^2, \quad \tau = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

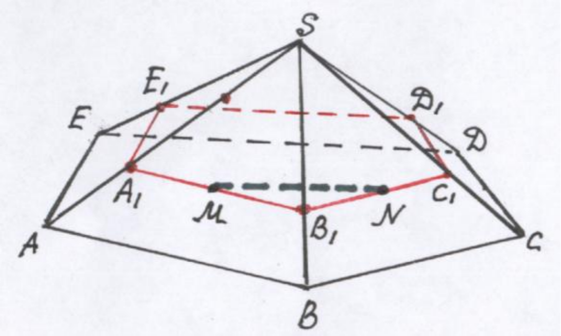
$$\tau^2 = \tau + 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$V = \frac{5}{12} a^3 (3+\sqrt{5})$$

Ответ: $V = \frac{5}{12} a^3 (3+\sqrt{5})$

5. Объём додекаэдра, длина ребра которого равна а.

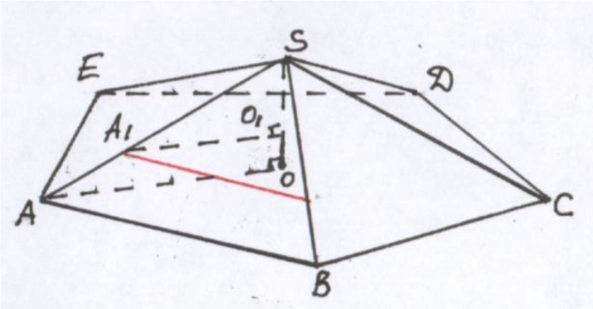




Воспользуемся тем, что вершины додекаэдра являются центрами граней икосаэдра. Пусть ребро икосаэдра равно *b*, $AA_1 : A_1S = 1 : 2$, $(A_1B_1C_1) || (ABC)$, $A_1M = MB_1$, $B_1N = NC_1$, $MN = a$ – ребро додекаэдра.

$$MN = \frac{1}{2} A_1C_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} AC = \frac{1}{3} b\tau = a, \Rightarrow b = \frac{3a}{\tau}.$$

$$SO = \frac{b}{\sqrt{\tau+2}}, \quad SO_1 = \frac{2}{3} SO, \quad S_{MNPKF} = \frac{5a^2\tau^2}{4\sqrt{\tau+2}}$$



Найдём расстояние между двумя параллельными гранями додекаэдра, обозначим его 2х, тогда:

$$2x = SS_1 - 2SO_1 = 2SO + h_a - 2\cdot\frac{2}{3}SO = \left|h_a - высота \quad антипризмы\right| =$$

$$= \frac{2}{3}SO + h_a = \frac{2b}{3\sqrt{\tau+2}} + \frac{b\tau}{\sqrt{\tau+2}} = \frac{b(2+3\tau)}{3\sqrt{\tau+2}} = \frac{b\tau^4}{3\sqrt{\tau+2}} = \frac{3a\tau^3}{3\sqrt{\tau+2}} = \frac{a\tau^3}{\sqrt{\tau+2}}$$

$$x = \frac{a\tau^3}{2\sqrt{\tau+2}},$$

$$V_{додекаэдра} = 12\cdot\frac{1}{3}S_{MNPKF}\cdot x = 4\cdot\frac{5a^2\tau^2}{4\sqrt{\tau+2}}\cdot\frac{a\tau^3}{2\sqrt{\tau+2}} = \frac{5\tau^2a^3\tau^3}{2(\tau+2)} = \frac{(\tau+2)^2a^3\tau^3}{2(\tau+2)} = \frac{1}{2}a^3\tau^3(\tau+2)$$

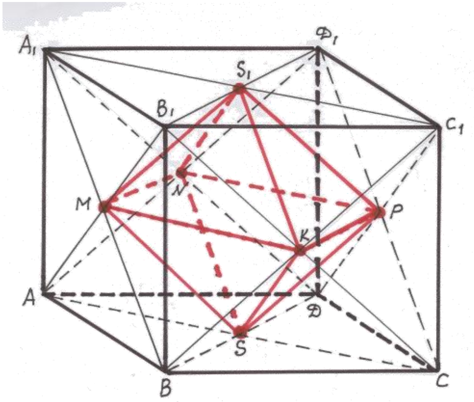
Если подставить вместо τ его значение, получим формулу

$$V = \frac{a^3}{4}(15+7\sqrt{5})$$

Ответ: $V = \frac{a^3}{4}(15+7\sqrt{5})$

2.11. Комбинации правильных многогранников и тел вращения.

Задача №1. В куб вписан октаэдр так, что вершины октаэдра являются центрами граней куба. Найти отношение объёма октаэдра к объёму куба.



Решение.

Пусть *a* – ребро куба, *b* – ребро октаэдра.

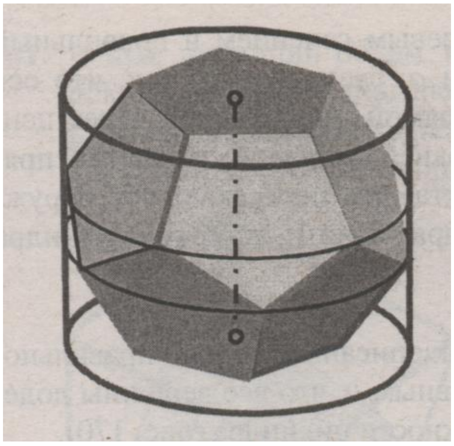
V$_{\text{куба}}$ = a^3, V$_{\text{октаэдра}}$=$\frac{b^3\sqrt{2}}{3}$. Выразим *b* через *a*.

$$b=\frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{V_{октаэдра}}{V_{куба}}=\frac{\frac{a^2 2\sqrt{2}}{8}\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}}{a^3}=\frac{1}{6}$$

Ответ: 1 : 6

Задача №2. Найти радиус цилиндра, так описанного около правильного додекаэдра с ребром, равным а, что все вершины додекаэдра принадлежат поверхности цилиндра.

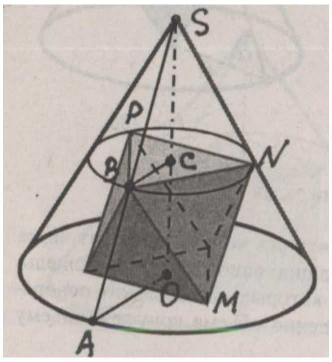


Решение.

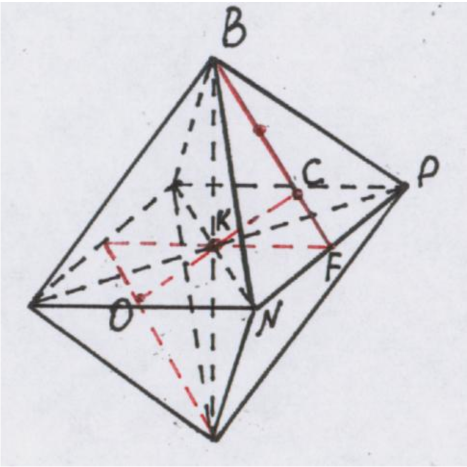
Можно найти радиус цилиндра как радиус круга, описанного около правильного пятиугольника, длина ребра которого равна диагонали грани додекаэдра, тогда

$$\ell=2R\cdot\sin 36^\circ,\Rightarrow,R=\frac{\ell}{2\sin 36^\circ}=\frac{a\tau\cdot 2\tau}{2\sqrt{\tau+2}}=\frac{a\tau^2}{\sqrt{\tau+2}}$$

Ответ: $R=\frac{a\tau^2}{\sqrt{\tau+2}}$

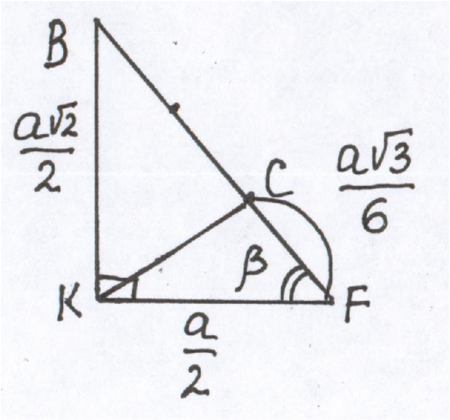


Задача №3. Радиус основания конуса равен R, а образующие наклонены к плоскости основания под углом α. Найти длину ребра правильного октаэдра, так вписанного в конус, что ось конуса проходит через центры двух параллельных граней октаэдра, одна из которых принадлежит основанию конуса.



Решение.

1. BC : CF = 2 : 1. OC = 2 KC.



2. ΔBKF: $KF = \frac{a}{2}, \quad BF = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\beta = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

3. ΔKCF:

$$KC^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{36} - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a^2}{6}, \quad KC = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

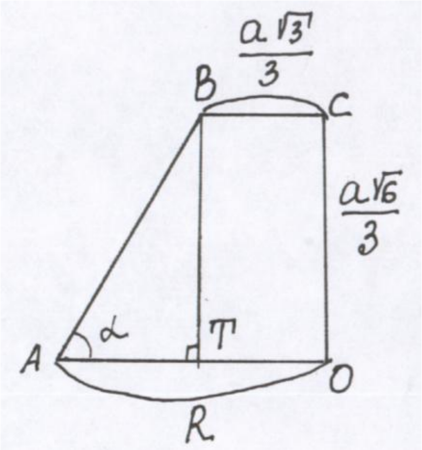
CO = $\frac{a\sqrt{6}}{3}$

4. ΔABT: $tg\alpha = \frac{a\sqrt{6}}{3(R - \frac{a\sqrt{3}}{3})} = \frac{a\sqrt{6}}{3R - a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{R\sqrt{3} - a}$

$a(\sqrt{2} + tg\alpha) = R\sqrt{3}tg\alpha$

$a = \frac{R\sqrt{3}tg\alpha}{\sqrt{2} + tg\alpha}$

Ответ: $a = \frac{R\sqrt{3}tg\alpha}{\sqrt{2} + tg\alpha}$



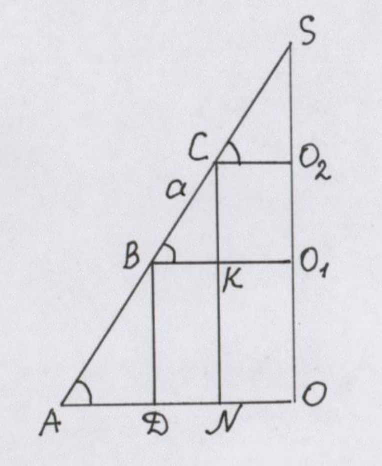
Задача №4. Вычислить объём конуса, описанного около правильного додекаэдра с ребром a так, что рёбра идущие к вершинам одной из его граней, лежат на образующих конуса, а противоположная грань – на основании конуса.

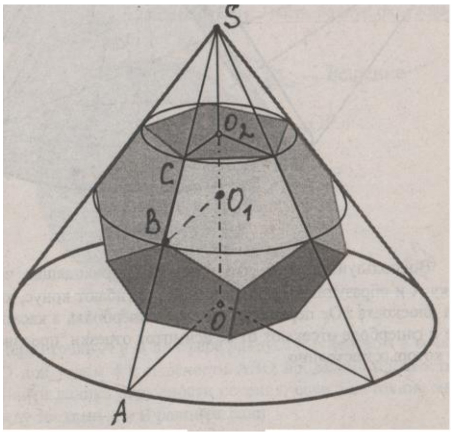
Решение.

1) $OO_1 = \frac{a\tau^3}{\sqrt{\tau+2}}$

2) $CO_2 = \frac{a\tau}{\sqrt{\tau+2}}$

3) $BO_1 = \frac{a\tau^2}{\sqrt{\tau+2}}$





4) $BK = BO_1 - CO_2 = \frac{a\tau^2}{\sqrt{\tau+2}} - \frac{a\tau}{\sqrt{\tau+2}} = \left|\tau^2 - \tau = 1\right| = \frac{a}{\sqrt{\tau+2}}$

5) $CK = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{\tau+2}} = \left|\tau + 2 - 1 = \tau + 1 = \tau^2\right| = \frac{a\tau}{\sqrt{\tau+2}}$

6) $tg\alpha = \frac{CK}{BK} = \tau$

7) $SO_2 = CO_2 \cdot tg\alpha = \frac{a\tau^2}{\sqrt{\tau+2}}$

8) $SO = SO_2 + O_2O = \frac{a\tau^2}{\sqrt{\tau+2}} + \frac{a\tau^3}{\sqrt{\tau+2}} = \frac{a\tau^4}{\sqrt{\tau+2}}$

9) $AO = \frac{SO}{tg\alpha} = \frac{a\tau^3}{\sqrt{\tau+2}}$

10) $V = \frac{1}{3}\pi \cdot AO^2 \cdot SO = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{a^3\tau^{10}}{(\sqrt{\tau+2})^3}$

Ответ: $V = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{a^3\tau^{10}}{(\sqrt{\tau+2})^3}$

3. Заключение.

В реферате я осветила все вопросы, заявленные в оглавлении.

Может показаться, что решения некоторых задач содержат излишние преобразования. Но большая часть условий взята из книги В.И. Костицына «Практические занятия по стереометрии. Задачи ЕГЭ по стереометрии». В этой книге отсутствуют решения задач, но имеются к ним ответы. Я старалась привести полученные мною результаты в соответствие с авторскими ответами.

Список литературы.

1. Яковлев А.Я. *Леонард Эйлер*. М.: «Просвещение», 1983 г.

2. Бескин Л.Н. *Стереометрия.* Пособие для учителей средней школы. М.: Государственное учебно-методическое издательство Министерства просвещения, 1960 г.

3. Кольман Э. *История математики в древности.* М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961 г.

4. Веннинджер М. *Модели многогранников.* М.: Издательство «Мир», 1974 г.

5. Крицман В.А. (составитель). *Книга для чтения по неорганической химии.* В 2 ч. М.: Просвещение, 1993 г.

6. Образовательная коллекция. *Стереометрия 10 – 11.* Носитель информации с программами для ЭВМ. «1С Паблишинг», 2005 г.

7. Дерягин Б.В., Федосеев Д.В. *Алмазы делают химики*. М.: «Педагогика», 1980 г.

8. Костицын В.Н. *Практические занятия по стереометрии*. М.: Издательство «ЭКЗАМЕН», 2004 г.

9. Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.Я. *Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Геометрия (стереометрия)*. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000.